



**Hochschule
Kaiserslautern**
University of
Applied Sciences

Betriebswirtschaft
Zweibrücken

Wissenschaftliche Arbeitspapiere
Working Paper

Konditionierte Up-and-Down-Kursmodelle

- *Is the Trend your Friend?*

Klaus J. Schröter

Fachbereich Betriebswirtschaft

Nr. 2
2019

Klaus J. Schröter

Konditionierte Up-and-Down-Kursmodelle
- *Is the Trend your Friend?*

Zweibrücken: 2019

(Wissenschaftliches Arbeitspapier / Working Paper, 33 S.,
Hochschule Kaiserslautern, Fachbereich Betriebswirtschaft,
Nr. 2/2019)

Hrsg.: Prof. Dr. Christian Aichele

Prof. Dr. Michael Jacob

Prof. Dr. Marc Piazzolo

Prof. Dr. Walter Ruda

Nicht im Buchhandel erhältlich

Schutzgebühr: € 5,00

Bezug: Dekanat Fachbereich Betriebswirtschaft
Hochschule Kaiserslautern, Standort Zweibrücken
Amerikastr. 1
66482 Zweibrücken

WWW: <https://www.hs-kl.de/>

Zu dem Autor:

Prof. Dr. Klaus J. Schröter
Professor für Finanzdienstleistungen

Hochschule Kaiserslautern, Campus Zweibrücken (klaus.schroeter@hs-kl.de)

1. Einführung

Im Folgenden werden spezielle **Modelle für die Kursentwicklung** von Wertpapieren entwickelt, bei denen die Wahrscheinlichkeit des Anstiegs des Kurses (Up) von der Anzahl der zuvor nacheinander in gleiche Richtung erfolgenden Kursbewegungen (Ups bzw. Downs) die abhängig ist.

Diese zugehörigen **bedingten Modell-Wahrscheinlichkeiten** werden

- unterschiedlich modelliert, d. h. es werden verschiedene Funktionsansätze herangezogen,
- für verschiedene Wertpapiere diskutiert und analysiert,
- für unterschiedliche **Time-Lags**, d. h. verschiedene Zeitperioden zwischen den Kursfeststellungen modelliert und analysiert,
- wobei bei der Modellkalibrierung unterschiedliche Verfahren zur Schätzung der Parameter verwendet werden.

Eine weitere Komponente der Modellierung betrifft die absoluten (Schritt-) **Längen der Kursbewegungen**. Diese werden durch verschobene Gamma-Verteilungen beschrieben.

Die Modellansätze können sehr einfach für die Zwecke der **Simulation** verwendet. Mit Hilfe der Simulationen können ausgewählte **Anlagestrategien** in dem Modell bewertet werden.

2. Statistische Auswertungen von Up-and-Down-Bewegungen

2.1 Einführende Begriffe

Gegenstand der nachfolgenden Ausführungen ist die Analyse und spätere Modellierung der Kursentwicklung eines zunächst beliebigen Wertpapiers (**Basiswert**, *Underlying*). Formal wird der Kursverlauf dieses Wertpapiers durch einen **Zufallsprozess** oder **stochastischen Prozess**¹

$$X := (X_t)_{t \in T}$$

beschrieben, wobei

- X_t := Kurs des Basiswerts zum Zeitpunkt t ,
- $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ = Menge der Zeitpunkte der Kursfeststellungen,
- $n = |T|$ = Anzahl der Zeitpunkte der Kursfeststellungen,
- t_i = Zeitpunkt der i -ten Kursfeststellung, $i = 1, \dots, n$.

Die Kursverläufe können sich dabei auf sehr unterschiedliche Zeiträume n_T beziehen. Im Fall eines (Börsen-)Tages ($n_T = 1$ Tag) werden die Kursfeststellungen somit mitunter in Bruchteilen von Sekunden erfolgen, während in **Monats-** oder **Mehr-Jahres-Zeiträumen** ($n_T = 1$ Monat bzw. $n_T =$ mehrere Jahre) in der Regel **Tages-** oder **Wochenschlusskurse** betrachtet werden.

Im Gegensatz zu Modellansätzen mit rein zufälligen Kursverläufen werden hier spezielle Modellierungskonzepte verfolgt, die den zukünftigen Kursverlauf in Abhängigkeit von bestimmten vergangenen Ereignissen, aber natürlich überlagert durch den Zufall, beschreiben. Im Fokus stehen insbesondere nacheinander erfolgende **Kursanstiege** bzw. **-rückgänge**.

Offenbar liegt bei dem Zufallsprozess X im Zeitpunkt t_i genau dann ein

ein **Kursanstieg** vor, wenn $X_{t_i} > X_{t_{i-1}}$ gilt;

ein **Kursrückgang** vor, wenn $X_{t_i} < X_{t_{i-1}}$ gilt

und eine **Kurskonstanz** vor, wenn $X_{t_i} = X_{t_{i-1}}$.

Diese Kursanstiege, -rückgänge und -konstanzen werden hier kürzer **Ups**, **Downs** bzw. **Equals** genannt und häufig durch die Kurznotationen „u“, „d“ und „e“ gekennzeichnet.

Im Fokus dieser Studie stehen eindeutig die **Richtungen** der Kursbewegungen - unterschieden nach der Anzahl der vorher gleichgerichteten Kursbewegungen. Für die vorzunehmenden Simulationen, s. Kapitel 4, sind aber neben den Richtungen der Kursbewegungen auch die Längen oder äquivalent dazu die **relativen Kursveränderungen**

¹ Vgl. etwa Klenke (2013), S. 193.

$$D_i := \frac{X_{t_i}}{X_{t_{i-1}}} - 1, i = 2, \dots, n,$$

von Bedeutung. Die spätere Modellierung wird sich auf die Verteilung der absoluten Länge dieser Kursveränderungen, also auf

$$|D_i| = \begin{cases} \frac{X_{t_i}}{X_{t_{i-1}}} - 1 & \text{falls } X_{t_i} \geq X_{t_{i-1}} \\ 1 - \frac{X_{t_i}}{X_{t_{i-1}}} & \text{falls } X_{t_i} < X_{t_{i-1}} \end{cases}, i = 2, \dots, n,$$

konzentrieren.

2.2 Datenerhebung

2.2.1 Kurslisten

Die Basis der statistischen Auswertungen stellen Vergangenheitsdaten dar, die meist in Form der sogenannten **Kurslisten** vorliegen. Die Kurslisten sind für die meisten Wertpapiere kostenlos zugänglich, etwa auf Internetplattformen wie *Ariva*, *comdirect* und *Onvista* und.² Solche Kurslisten haben häufig eine Struktur, wie sie die folgende Abbildung auszugsweise vermittelt:

Zähler	Zeit	Kurs	Volumen
1	17:35:31	82,37	203.361
2	17:29:57	82,18	219
3	17:29:56	82,18	703
4	17:29:49	82,18	200
5	17:29:46	82,18	150
6	17:29:38	82,18	500
7	17:29:24	82,18	80
8	17:29:16	82,21	212
9	17:28:57	82,24	5.000
10	17:27:56	82,24	500

Abb. 1: Auszug einer Kursliste („Ticker-Liste“)

Kurslisten, die den vollständigen Verlauf innerhalb eines (kurzen) Zeitraumes, wie z.B. eines Tages angeben, werden als **Ticker-Listen** bezeichnet. Neben den Zeitpunkten (t) der Kursfeststellungen (2. Spalte) und den zugehörigen Kursen (X_t) (3. Spalte) werden meist auch die zugehörigen Transaktionsvolumina (4. Spalte) angegeben. Diese Ticker-Listen sowie ähnliche Kurslisten, die nur Tages-, Wochen- oder Monatsschlusskurse enthalten, werden vor der statistischen Auswertung geeignet aufbereitet. Zunächst werden die Daten in der Regel umgeordnet, um eine chronologische Reihenfolge zu generieren. Die folgende Abbildung 2 skizziert eine solche Aufbereitung.

² Vgl. die Weblinks www.ariva.de, www.comdirect.de und www.onvista.de.

Reihenfolge tauschen	u/e/d	Relative Kursveränderung (bei Veränderung)	Länge der Bindungen	
			Zähler	Status
82,37				
82,40	u	0,0364%	1	u
82,39	d	0,0121%	1	d
82,40	u	0,0121%	1	u
82,42	u	0,0243%	2	u
82,25	d	0,2063%	1	d
82,35	u	0,1216%	1	u
82,35	e		1	u
82,37	u	0,0243%	2	u
82,38	u	0,0121%	3	u

Abb. 2: Auszug einer aufbereiteten Kursliste

Die erste Spalte gibt die Kurse in umgekehrter Reihenfolge an.³ In der 2. Spalte wird markiert, ob ein Kursanstieg, -rückgang oder eine Kurskonstanz vorliegt. Von 0 verschiedene Kursveränderungen werden in der 3. Spalte angegeben. Für die statistische Analyse empfiehlt es sich mitunter, die Kurskonstanzen zu eliminieren. Die verbleibenden Kursanstiege und Kursrückgänge werden als **echte Kursbewegungen** bezeichnet:

n_u := Anzahl der Kursanstiege

n_d := Anzahl der Kursrückgänge

n_e := Anzahl der Kurskonstanzen

n^* := Anzahl der echten Kursbewegungen = $n_u + n_d$

Für die folgenden Überlegungen wird vereinfachend vorausgesetzt, dass Kurskonstanzen bereits eliminiert wurden, d.h. es gilt $n_e = 0$ und $n^* = n_u + n_d = n - 1$. Bei Kurskonstanzen werden im Rahmen der statistischen Analyse im Übrigen die zugehörigen Transaktionsvolumina kumuliert, während die (unterschiedlichen) Zeitpunkte aus den Betrachtungen ausscheiden. Diese Datenaufbereitung würde z.B. aus der Kursliste aus Abb. 1 die folgende machen.

Zähler	Kurs	Volumen
1	82,37	203.361
2	82,18	1.852
3	82,21	212
4	82,24	5.500

Abb. 3: Auszug einer aggregierten Kursliste

Als **Bindung** sei im Folgenden eine Phase gleicher Kursrichtung bezeichnet, wobei Kurskonstanzen diese nicht unterbrechen. Die Anzahl der Kursfeststellungen gleicher Richtung wird als **Länge der Bindung** bezeichnet.⁴

³ Da es sich in Abbildung 1 und 2 um Auszüge einer umfangreichen echten Kursliste handelt, sind die Kurse aus Abb. 2 nicht die aus Abb.1 in umgekehrter Reihenfolge.

⁴ Im Falle der Kursliste aus Abb. 2 liegt gegen Ende eine Bindung der Länge 3 vor. Die Kurskonstanz „e“ unterbricht sie nicht. Allerdings könnte sich die Bindung im weiteren Verlauf noch verlängern.

2.2.2 Bedingte relative Häufigkeiten

Zentrale Bedeutung für die weiteren Schritte der Analyse und Modellierung hat die Frage, inwiefern die Anzahl gleichartiger Kursbewegungen, also die Länge der Bindung, einen signifikanten Einfluss auf die künftige Kursrichtung hat. Aus diesem Grund werden die folgenden statistischen Größen eingeführt, die für jede Kursliste X und für $k = 1, 2, \dots$ zu berechnen sind:⁵

$$\begin{aligned}
 U_u(k) &:= \text{Absolute Anzahl der Ups, nachdem zuvor genau } k \text{ Ups vorlagen} \\
 U_d(k) &:= \text{Absolute Anzahl der Ups, nachdem zuvor genau } k \text{ Downs vorlagen} \\
 D_u(k) &:= \text{Absolute Anzahl der Downs, nachdem zuvor genau } k \text{ Ups vorlagen} \\
 D_d(k) &:= \text{Absolute Anzahl der Downs, nachdem zuvor genau } k \text{ Downs vorlagen}
 \end{aligned}$$

Für eine auszuwertende Kursliste mit n Kursfeststellungen und somit $n-1$ Kursveränderungen ist zunächst k_{\max} , die **maximale Länge der Bindungen**, also die größte Anzahl nacheinander auftretender gleichgerichteter Kursbewegungen zu ermitteln. Konventionell wird der ersten Kursbewegung kein Vorgänger zugeordnet, so dass es genau $n-2$ Fälle mit einer bekannten Anzahl vorheriger Kursrichtungen gibt.

Mit

$$\begin{aligned}
 H_u(k) &:= U_u(k) + D_u(k) \quad , k = 1, 2, \dots, k_{\max} \\
 H_d(k) &:= U_d(k) + D_d(k) \quad , k = 1, 2, \dots, k_{\max}
 \end{aligned}$$

sind die **absoluten Anzahlen** der Kursfeststellungen nach genau k Ups bzw. Downs gegeben. Im Allgemeinen werden diese Anzahlen für wachsendes k gegen Null streben, da es selbstverständlich nur sehr selten passiert, dass sich ein Kurs etwa mehr als zehn Male in die gleiche Richtung bewegt. Außerdem gilt

$$\sum_{k=1}^{k_{\max}} (H_u(k) + H_d(k)) = n - 2.$$

Die Summe aller auftretenden Ups und Downs mit bekanntem Vorgänger ist also die Anzahl der (echten) Kursbewegungen abzüglich 1, denn für die erste Kursbewegung gilt die vorherige Kursbewegung hier als unbekannt.

Da sich in jeder Kursliste die Bindungen von Ups und die Bindungen von Downs abwechseln und die Mindestlänge 1 haben, unterscheiden sich die Anzahlen $H_u(1)$ und $H_d(1)$ höchstens um 1:

$$|H_u(1) - H_d(1)| \leq 1$$

Noch mehr als diese absoluten Anzahlen interessieren hinsichtlich der anstehenden Modellbildung die folgenden **relativen Häufigkeiten**

⁵ Auf die Indizierung der Größen mit der Kursliste X wird zwecks Vereinfachung der Bezeichnungen verzichtet.

$$h_u(k) := \frac{U_u(k)}{H_u(k)}, k = 1, 2, \dots, k_{\max}$$

$$h_d(k) := \frac{U_d(k)}{H_d(k)}, k = 1, 2, \dots, k_{\max}$$

Diese relativen Häufigkeiten geben also für die Fälle von zuvor genau k gleichgerichteten Kursbewegungen die Anteile der Ups an. Diese **bedingten relativen Häufigkeiten** können als Schätzer für die uns interessierenden bedingten Wahrscheinlichkeiten eines Ups nach zuvor genau k gleichgerichteten Kursbewegungen angesehen werden. Die Komplemente

$$1 - h_u(k) = \frac{D_u(k)}{H_u(k)}, k = 1, 2, \dots$$

$$1 - h_d(k) = \frac{D_d(k)}{H_d(k)}, k = 1, 2, \dots$$

sind analog die bedingten relativen Häufigkeiten der Downs nach zuvor genau k gleichgerichteten Kursbewegungen und können entsprechend als Schätzer für die bedingten Wahrscheinlichkeiten von Downs herangezogen werden.

Auch die Häufigkeiten des Auftretens von Bindungen interessiert, etwa bei der Analyse von **Anlagestrategien** und hierbei insbesondere hinsichtlich der Wahrscheinlichkeit auslösender Ereignisse („**Trigger**“).

$$\beta_u(k) := \text{Absolute Anzahl der Bindungen in Form von genau } k \text{ Ups}$$

$$\beta_d(k) := \text{Absolute Anzahl der Bindungen in Form von genau } k \text{ Downs}$$

Diese absoluten Häufigkeiten der Bindungen multipliziert mit den jeweiligen Längen ergibt die Gesamtanzahl der echten Kursbewegungen, d.h. es gilt konkreter:

$$\sum_{k=1}^{k_{\max}} k \cdot \beta_u(k) = n_u, \quad \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \cdot \beta_d(k) = n_d, \quad \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \cdot (\beta_u(k) + \beta_d(k)) = n^*$$

Es gibt auch eine enge Verbindung zwischen den absoluten Häufigkeiten $H_u(k)$ und $H_d(k)$ und den Häufigkeiten $\beta_u(k)$ und $\beta_d(k)$ der Bindungen. Man könnte nämlich vermuten, dass die Differenz des Auftretens von $k+1$ bzw. k gleichen Kursbewegungen, also

$$H_u(k+1) - H_u(k) \quad \text{bzw.} \quad H_d(k+1) - H_d(k)$$

auf die Anzahl der jeweiligen Bindungen führt. Dies stimmt aber nicht exakt, da sich die Häufigkeiten $H_u(k)$ und $H_d(k)$ nur auf die $n-2$ Kursbewegungen beziehen, deren Vorgänger bekannt. Die Häufigkeiten $\beta_u(k)$ und $\beta_d(k)$ erfassen hingegen die $n-1$ echten Kursbewegungen. Folglich enthalten letztere entweder eine Kursbewegung der Länge 1 mehr oder eine Kursbewegung einer bestimmten Länge $k > 1$ mehr und eine der Länge $k-1$ weniger. Es gilt deshalb

$$\sum_{k=1}^{k_{\max}} k \cdot (H_u(k+1) - H_u(k)) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \cdot (H_d(k+1) - H_d(k)) = n_u + n_d - 1 = n^* - 1.$$

Im Rahmen der in dieser Studie vorgenommenen statistischen Analysen wurden Kurslisten von neun DAX-Unternehmen erhoben, die seit 1990 ununterbrochen im DAX 30 gelistet waren.⁶ Zunächst wurden für diese neun Unternehmen die bedingten relativen Häufigkeiten $h_u(k)$ und $h_d(k)$ für die **Ticker-Liste** des 5. August 2019 berechnet.⁷ Für vorangehende Ups ergaben sich die folgenden Verläufe:

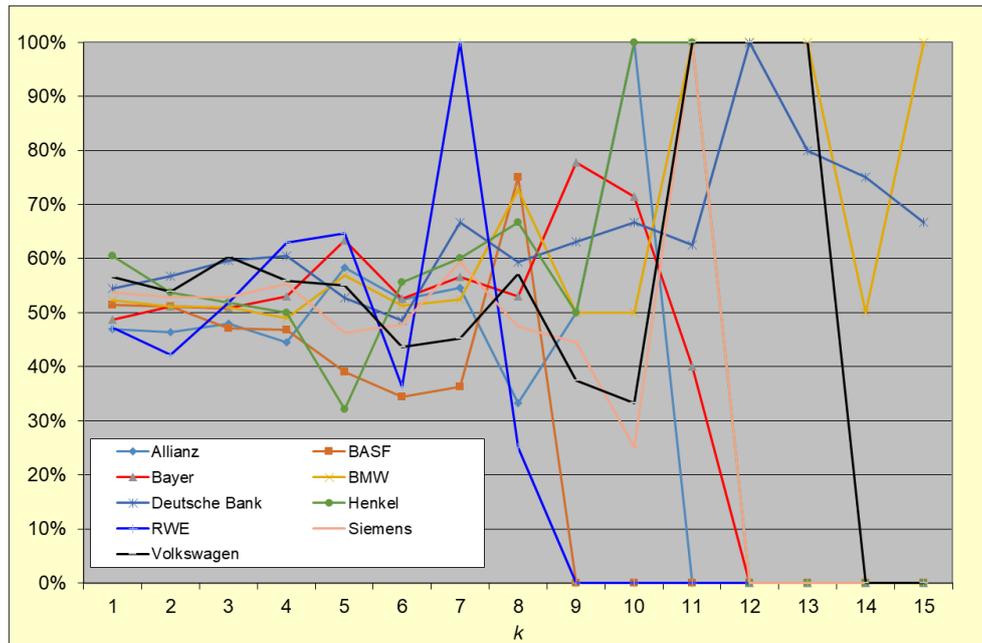


Abb. 4: $h_u(k)$ = Relative Häufigkeiten von Ups nach aufeinanderfolgenden Ups

Werte über 50 % sprechen hier also für ein Trendverhalten, wobei von einem Trend sicher erst ab mehreren gleichgerichteten Bewegungen gesprochen werden sollte. Statistisch gilt von Anfang an dem Umstand Aufmerksamkeit zu widmen, dass es wesentlich mehr kurze Bindungen als lange gibt, so dass diese relativen Häufigkeiten für wachsende k stärker schwanken und weniger aussagekräftig sind.⁸

⁶ Diese Unternehmen sind in alphabetischer Reihenfolge *Allianz*, *BASF*, *Bayer*, *BMW*, *Deutsche Bank*, *Henkel*, *RWE*, *Siemens* und *Volkswagen*.

⁷ Dieser Börsentag wurde als Repräsentant einer Ticker-Liste ausgewählt, weil er im Tagesverlauf keinen besonders signifikanten Trend aufwies.

⁸ Die vollständigen Daten sind im Anhang 1 angegeben.

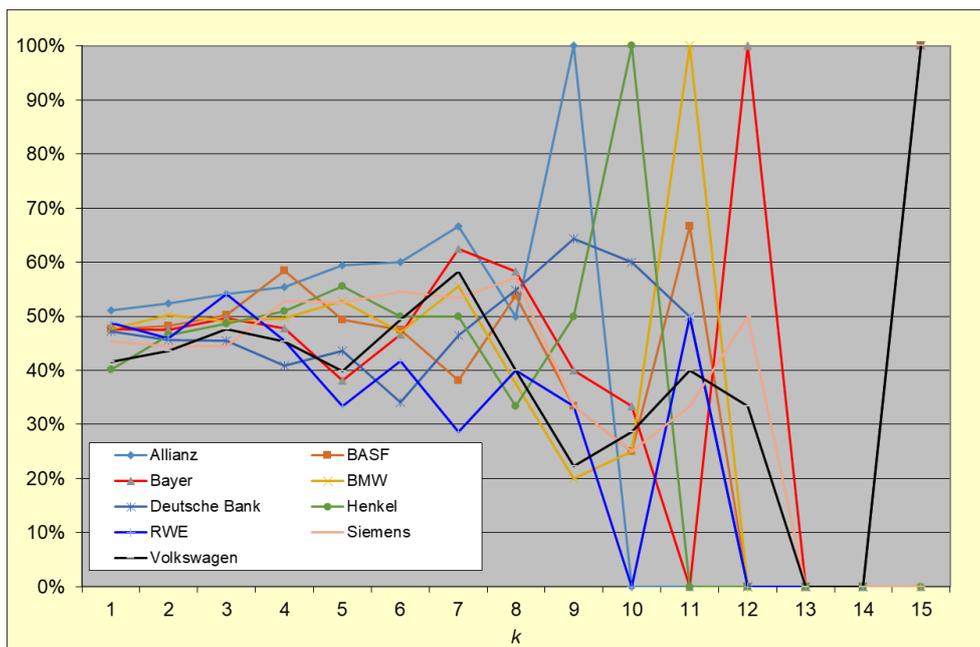


Abb. 5: $h_d(k)$ = Relative Häufigkeiten von Ups nach aufeinanderfolgenden Downs

Hier sind bei unterstelltem Trendverhalten eher Werte unterhalb von 50 % zu erwarten.

Des Weiteren wurden für die genannten neun DAX-Unternehmen und den DAX selbst auch die Tagesschlusskurse seit dem 2.1.1990 bis zum 12.7.2019 analysiert.

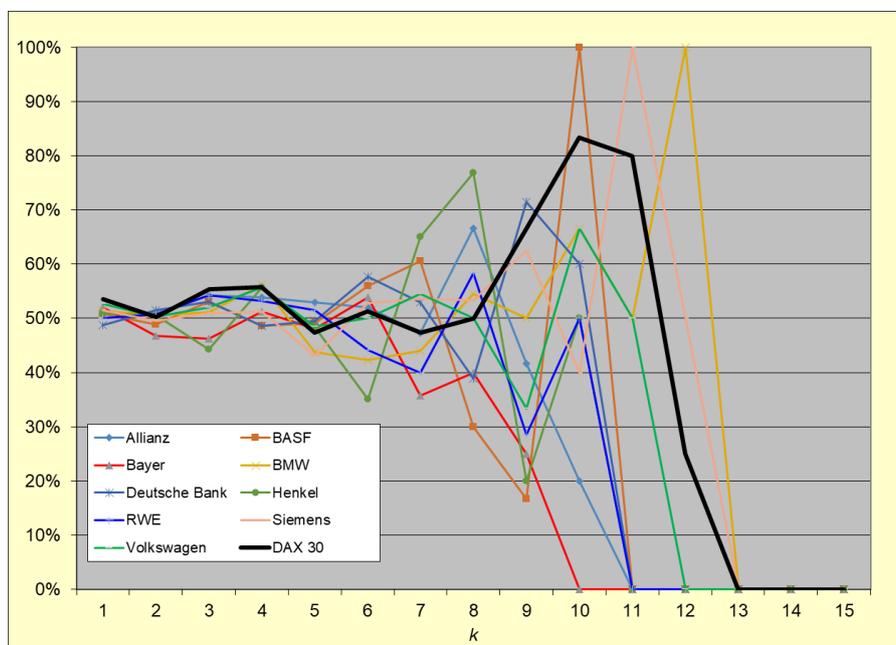


Abb. 6: $h_u(k)$ = Rel. Häufigkeiten von Ups nach aufeinanderfolgenden Ups / Tagesschlusskurse

Für die relativen Häufigkeiten nach Downs ergaben sich die folgenden Verläufe:

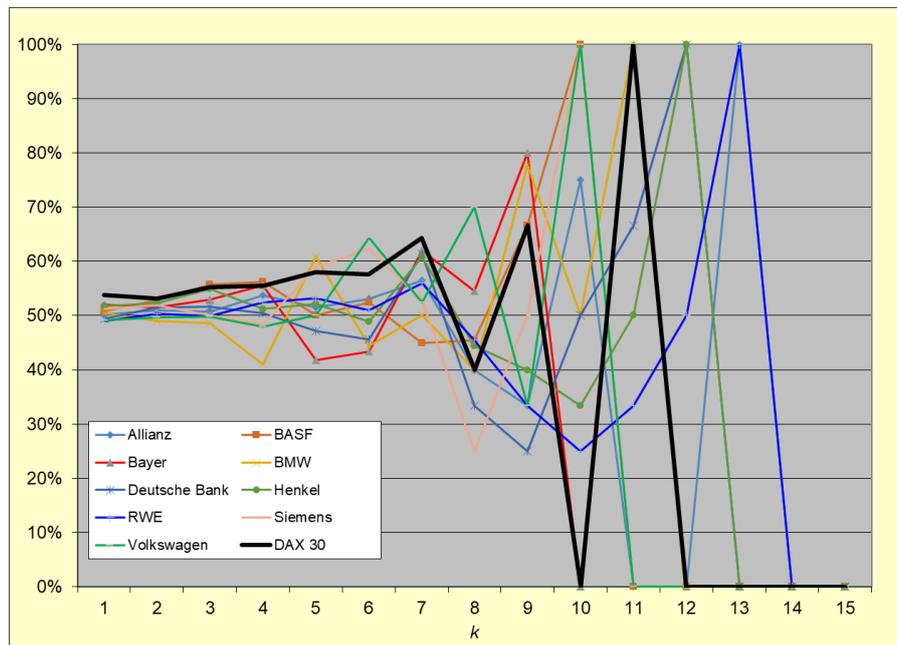


Abb. 7: $h_d(k)$ = Rel. Häufigkeiten von Ups nach aufeinanderfolgenden Downs / Tagesschlusskurse

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass es nach der Eliminierung der Equals nur noch Ups und Downs gibt. Insofern können sich Analysen auf das (bedingte) Auftreten von Ups konzentrieren. Die entsprechenden relativen Häufigkeiten der Downs sind dann die Komplemente $1-h_u(k)$ bzw. $1-h_d(k)$.

2.2.3 Bedingte absolute relative Kursveränderungen

Getrennt nach den Kurslisten für die Tagesverläufe („Ticker-Listen“) und für die Tagesschlusskurse wurden statistische Auswertungen der relativen Kursveränderungen vorgenommen. Diese Erhebungen wurden wie folgt differenziert:

- sämtliche absolute relative Kursveränderungen
- absolute relative Kursveränderungen, unterschieden in Kursanstiege und Kursrückgänge
- absolute relative Kursveränderungen, unterschieden in Kursanstiegen und Kursrückgängen, jeweils nach Kursanstiegen bzw. -rückgängen.

Es lagen also insgesamt 14 (= 2·7) Teilerhebungen vor. Diese Erhebungen bezogen sich auf (fiktive) **Aggregatlisten**, die sich durch Zusammenführung der Daten der je neun Listen der einzelnen Wertpapiere ergaben.⁹

⁹ Die Liste der Tagesschlusskurse des DAX® wurde hier nicht einbezogen, um keine doppelte Erfassung von einzelnen Wertpapieren zu generieren.

Es ergaben sich für die erhobenen **absoluten relativen Kursveränderungen** $|D_i|$ die folgenden Stichprobenkennzahlen.

		Ticker-Listen			Ups nach		Downs nach	
		gesamt	nur Ups	nur Downs	Ups	Downs	Ups	Downs
	Anzahlen	41.971	20.910	21.061	11.025	9.885	9.884	11.177
	Mittlere relative Kursveränderung	0,0223%	0,0221%	0,0225%	0,0205%	0,0240%	0,0247%	0,0206%
	Stichproben-Standardabweichung	0,0155%	0,0153%	0,0157%	0,0126%	0,0177%	0,0178%	0,0132%
	Stichproben-Schiefe	7,7214	7,7009	7,7401	6,0312	7,9671	7,3077	8,1497
		Tagesschlusskurse			Ups nach		Downs nach	
		gesamt	nur Ups	nur Downs	Ups	Downs	Ups	Downs
	Anzahlen	65.800	33.416	32.384	16.944	16.472	16.475	15.909
	Mittlere relative Kursveränderung	1,3694%	1,3826%	1,3558%	1,3715%	1,3941%	1,2883%	1,4257%
	Stichproben-Standardabweichung	1,4418%	1,4726%	1,4092%	1,4440%	1,5015%	1,3276%	1,4857%
	Stichproben-Schiefe	3,2842	3,6533	2,8428	3,1555	4,1040	2,8613	2,7953

Abb. 8: Stichprobenkennzahlen der absoluten relativen Kursveränderungen

Selbstverständlich unterscheiden sich diese Kennzahlen für Ticker-Listen und Kurslisten von Tagesschlusskursen erheblich. So betragen die mittleren relativen Kursveränderungen bei den Ticker-Listen

$$\mu_T := 0,0223\%,$$

während sich bei den Tagesschlusskursen der gut 60-fach größere Mittelwert

$$\mu_S := 1,3694\%$$

ergab. Andererseits deuten die Zahlen an, dass sich eine stark differenzierte Betrachtung, unterschieden nach Ups und Downs sowie nach der direkten Historie, wenig lohnt. So ähneln sich für feste Listentypen und bei naheliegenden Bezeichnungen sowohl

- die arithmetischen Mittelwerte $m^u, m^d, m^{uu}, m^{ud}, m^{ud}, m^{dd}$,
- die Stichprobenstandardabweichungen $s^u, s^d, s^{uu}, s^{ud}, s^{ud}, s^{dd}$
- als auch Stichprobenschiefen $\gamma^u, \gamma^d, \gamma^{uu}, \gamma^{ud}, \gamma^{ud}, \gamma^{dd}$

sehr. Weitere Unterscheidungen, etwa nach der Länge der vorherigen gleichgerichteten Kursbewegung erschienen deshalb wenig ergiebig und wurden nicht vorgenommen.

3. Modelle für Up-and-Down-Bewegungen bei Kursverläufen

3.1 Bedingte Bernoulli-Verteilungen für Kursrichtungen

3.1.1 Allgemeine Modellansätze

Insbesondere für die Zwecke der Simulation ist es erforderlich, den beobachteten Kursverläufen möglichst geeignete wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle anzupassen. Hier werden spezielle Ansätze verfolgt, die mit **Bernoulli-Verteilungen** $Bin(1,p)$ operieren. Hierfür sei zunächst

$$Z_t = \text{Zustand/aktuelle Kursbewegung von } X \text{ in } t = \begin{cases} u & \text{für Up} \\ d & \text{für Down} \end{cases}$$

$$K_t = \text{Länge der Bindung in } t \in \{1, 2, \dots\}$$

$$B_t = (Z_t, K_t) \quad \text{für } t \in T$$

Konkret sei nun Folgendes angenommen:

$$\boxed{P(X_t > X_{t-1} \mid B_{t-1} = (z, k)) =: p_z(k)} \quad \text{für } z = u, d; k = 1, 2, \dots$$

Dieser Modellansatz besagt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Kursanstiegs lediglich abhängig von der Richtung und der Länge der letzten Kursbewegungen ist, aber nicht abhängig von dem Zeitpunkt (t_i) und der Historie vor der letzten gleichgerichteten Kursbewegung. Diese Modellierung grenzt sich somit einerseits klar von den sogenannten **random walks** ab, bei denen die auftretenden Zuwächse (Kursbewegungen) in jedem Zeitpunkt die gleiche Verteilung haben und unabhängig von der früheren Zuwächsen sind.¹⁰ Auch von den bekannten **Markow-Prozessen** unterscheiden sich die hier vorgenommenen Ansätze i.e.S., da bei Markow-Prozessen lediglich die „Gegenwart“, das hieße hier der Status B_t im Zeitpunkt $t = t_{i-1}$, in die Wahrscheinlichkeitsverteilung der „Zukunft“ (X_t in $t = t_i$) eingeht, nicht aber die Vergangenheit und somit der Weg in die „Gegenwart“.¹¹ Moderne Ansätze der Modellierung von Kursentwicklungen beziehen sich häufig auf den **Hochfrequenzhandel**, der hier nicht explizit Gegenstand der Modellierung ist, aber auch erfasst wird.¹²

3.1.2 Polynomiale Regression

Für das weitere Vorgehen ist der oben genannte Modellansatz zu konkretisieren. Genauer gilt es, den Modellwahrscheinlichkeiten $p_z(k)$ konkrete funktionale Ansätze zuzuordnen. Hier bieten sich diverse Konzepte an. Besonders einfach und naheliegend sind Ansätze der einfachen **linearen Regression** der Art

¹⁰ Eine umfassende Darstellung der im Deutschen als **Irrfahrten** bezeichneten *random walks* stellt Henze (2018) bereit. S. auch Dworsky (2019), S. 89 ff.

¹¹ Vgl. etwa Behrends (2000), S. 4 ff.

¹² Vgl. Avellaneda & Stoikov (2008), Cartea & Jaimungal (2013) und Degiannakis & Floros (2015).

$$\text{Modell I: } p_z(k) = a_z + b_z \cdot k \quad \text{für } z = u, d; k = 1, 2, \dots$$

Hier wären die (vier) Parameter a_z und b_z , $z = u, d$, geeignet zu schätzen. Doch dieses Vorgehen bietet sich insbesondere deshalb weniger an, weil die Werte der linearen Funktion auf der rechten Seite des funktionalen Ansatzes (insbesondere für große k) nicht notwendig im Intervall $[0,1]$ liegen. Auch höhere Ansätze, etwa mit quadratischer Regression (Modell II), lösen diese Problematik nicht.

3.1.3 Logistische Regression

Ein populäres Vorgehen bei der Modellierung von Wahrscheinlichkeiten ist die **logistische Regression**¹³. Der zugehörige funktionale Ansatz lautet hier:

$$\text{Modell III: } p_z(k) = \frac{1}{1 + e^{-a_z - b_z \cdot k}} = \frac{e^{a_z + b_z \cdot k}}{1 + e^{a_z + b_z \cdot k}} \quad \text{für } z = u, d; k = 1, 2, \dots$$

Auch die „quadratische“ Erweiterung auf

$$\text{Modell IV: } p_z(k) = \frac{1}{1 + e^{-a_z - b_z \cdot k - c_z \cdot k^2}} \quad \text{für } z = u, d; k = 1, 2, \dots$$

stellt ein in Frage kommendes „höheres Modell“ dar.

3.1.4 Weitere log-polynomiale Regressionsmodelle

Selbstverständlich bieten sich hier einige weitere Ansätze an. Häufig werden z.B. **log-lineare** oder **log-quadratische Regressionsmodelle** folgenden Typs verwendet:

$$\text{Modell V: } p_z(k) = e^{a_z + b_z \cdot k} \Leftrightarrow \ln(p_z(k)) = a_z + b_z \cdot k$$

$$\text{Modell VI: } p_z(k) = e^{a_z + b_z \cdot k + c_z \cdot k^2} \Leftrightarrow \ln(p_z(k)) = a_z + b_z \cdot k + c_z \cdot k^2$$

für $z = u, d; k = 1, 2, \dots$

Allerdings ist auch hier durch den Funktionstyp nicht gewährleistet, dass die Werte zwingend im Intervall $[0,1]$ liegen.

Unterstellt man, dass nach einer sehr großen Anzahl von gleichgerichteten Kursbewegungen die Wahrscheinlichkeit eines Richtungswechsels gegen 0 strebt, so bieten sich die folgenden Modellansätze an:

$$\text{Modell VII: } p_u(k) = 1 - e^{-(a_u + b_u \cdot k)^2} \quad p_d(k) = e^{-(a_d + b_d \cdot k)^2}$$

$$\text{Modell VIII: } p_u(k) = 1 - e^{-(a_u + b_u \cdot k + c_u \cdot k^2)^2} \quad p_d(k) = e^{-(a_d + b_d \cdot k + c_d \cdot k^2)^2} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

Für all diese Modellansätze sind die Parameter mit geeigneten Methoden zu schätzen.

¹³ Vgl. etwa Schlittgen (2009), Kap. 8.2, oder weit ausführlicher Hosmer et al. (2013).

3.2 Ansätze mit Gamma-Verteilungen für Kursveränderungen

Wie bereits angesprochen liegt der Schwerpunkt der Modellbildung hier bei den Kursrichtungen. Dennoch ist es für die Modellierung der gesamten Kursbewegung selbstverständlich erforderlich, auch für die Länge der Kursbewegung bzw. die relative Kursveränderung einen geeigneten Modellansatz vorzusehen.

Da in Abschnitt 3.1. bereits die Kursrichtung modelliert ist, sind hier ausschließlich die absoluten relativen Kursveränderungen $|D_i|$ zu betrachten. Für diese echt positiven Zufallsvariablen wird ein Modellansatz mit **verschobenen Gamma-Verteilungen** gewählt. Konkret wird für die Verteilung $P^{|D|}$ der absoluten relativen Kursveränderung der Ansatz

$$P^{|D|} = c + \Gamma(a, b)$$

gewählt. Für diese Wahl spricht einerseits die hohe Anpassungsfähigkeit der Gamma-Verteilungen. Andererseits weisen die beobachteten absoluten relativen Kursveränderungen in der Regel eine gewisse positive Mindestgröße auf, was sich häufig durch die Rundung der Kurse auf Cents (2 Nachkommastellen) erklärt. Insofern bietet sich der Ansatz mit der Verschiebung um $c > 0$ an.

3.3 Parameterschätzung

Die Parameterschätzung in den polynomialen Regressionsmodelle aus Abschnitt 3.1.2 erfolgt mit Standardtechniken. Allerdings werden diese Modelle aus genannten Gründen nicht weiterverfolgt und bestenfalls zu Vergleichszwecken herangezogen.

Bei der logistischen Regression aus Abschnitt 3.1.3 erweist sich die **Maximum-Likelihood-Methode** für die Parameterschätzung als wenig geeignet, da die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Stichprobe wegen der nicht gegebenen Unabhängigkeit der Zuwächse sehr komplex sind. Stattdessen wird ein heuristischer LS-Ansatz verfolgt. Dem logistischen Regressionsansatz liegt die Vorstellung zugrunde, dass die unbekanntes wahren Wahrscheinlichkeiten $p_z(k)$ durch den Ansatz

$$p_z(k) \approx \frac{1}{1 + e^{-a_z - b_z \cdot k}}$$

approximiert werden können. Durch Transformation mit der sogenannten **Logit-Funktion**¹⁴ $g(x) = \ln(x/(1-x))$ ergibt sich ein linearer Regressionsansatz für transformierte Wahrscheinlichkeiten:

$$g(p_z(k)) = \ln\left(\frac{p_z(k)}{1 - p_z(k)}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{p_z(k)} - 1}\right) \approx \ln\left(\frac{1}{(1 + e^{-a_z - b_z \cdot k}) - 1}\right) = a_z + b_z \cdot k.$$

¹⁴ Vgl. erneut Schlittgen (2009), S. 204.

Es bietet sich somit an, die Regressionsgerade $a_z + b_z \cdot k$ an die transformierten bedingten relativen Häufigkeiten $g(h_z(k))$ anzupassen. Allerdings liegen hier zwei Gegebenheiten vor, die besondere Beachtung erfordern.

1. Wie bereits erwähnt ergeben sich die bedingten relativen Häufigkeiten $h_z(k)$ aus sehr unterschiedlichen Datenbasen. Für größere k liegen oft nur wenige bzw. keine Beobachtungen vor. Aus diesem Grund ist es nahezu zwingend, diese Größen mit geeigneten Gewichten w_k zu versehen, die bewirken, dass die Anpassung der Regressionsgeraden an die (transformierten) Daten in Bereichen mit vielen Beobachtungen stärker eingeht als den Rändern für große k . Diese Gewichte können schlicht die Anzahl der Beobachtungen, aber auch die verkauften Stückzahlen oder die Transaktionsvolumina sein. Im Folgenden wurde stets mit den Anzahlen der Beobachtungen gewichtet. Die Unterschiede zu den Varianten waren vernachlässigbar.
2. Da die Logit-Transformation nur für $x \in (0,1)$ definiert ist, ist die Anpassung auf solche Bereiche der relativen Häufigkeiten zu reduzieren, die ggf. echt positiv und echt kleiner als 1 sind. Diese Stützung der Stichprobe erscheint insbesondere wegen der vorzunehmenden Gewichtung vertretbar, da die Fälle bedingter relativer Häufigkeiten von 0 oder 1 ohnehin nur für große k und/oder in Fällen sehr weniger Beobachtungen auftreten.

Die Parameterschätzungen wurden für die neun Wertpapiere, die acht Modelle und unterscheiden nach den Ticker-Listen und den Tagesschlusskursen durchgeführt, so dass sich eine Vielzahl von Konstellationen ergab. Auf die Modelle mit quadratischen Komponenten wurde letztlich (II, IV, VI, VIII) verzichtet, da hier wenig stabile Schätzungen mit Tendenzen zum **Overfitting** vorlagen. Die Ergebnisse der sonstigen Konstellationen sind in Anhang 2 angegeben.

Wie bereits in Abschnitt 2.2.3 erwähnt, wurden aus den jeweils neun Kurslisten für die Tagesverläufe und die Tagesschlusskurse (fiktive) **Aggregatlisten** erstellt, die sich additiv aus den Daten der je neun Listen ergab. Die folgende Grafik illustriert - zunächst für die Ticker-Listen - für diese Aggregatliste einerseits die (bedingten) Kursanstiegshäufigkeiten und andererseits die Modellwahrscheinlichkeiten in den vier Modellen ohne quadratische Komponenten. Die Modelle I, III und V generieren wegen des Einflusses der Gewichtung insbesondere in den Bereichen kleiner k gute Näherungen, während Modell VII wegen der Strukturvorgabe am rechten Rand (für $k \rightarrow \infty$) nur mäßige Approximationen erzielt.

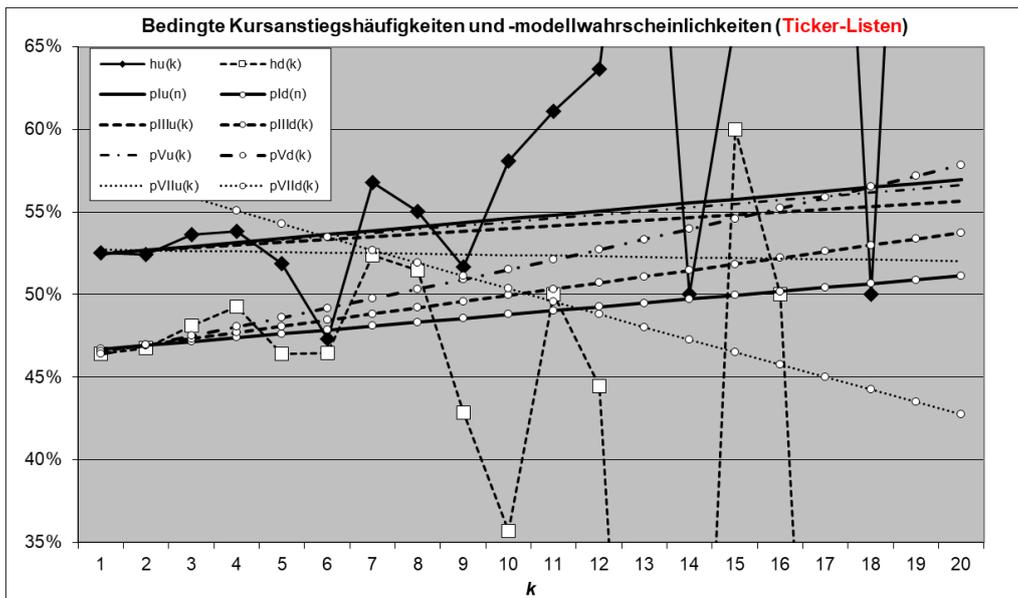


Abb. 9: Bedingte Kursanstieghäufigkeiten und -modellwahrscheinlichkeiten (Ticker-Listen)

Bei Kurslisten der Tagesschlusskurse fallen die drei Modellansätze I, III und V für die Aggregatliste fast zusammen. Erneut weichen die Werte des Modells VII deutlich von den anderen ab, allerdings nur für die Situationen nach Kursrückgängen. Insgesamt ist die Anpassung für die Verläufe der Tagesschlusskurse erkennbar stabiler, d. h. konkret weniger abhängig von der Modellbildung. Allerdings weisen die Anpassungen eher auf das Gegenteil des vermeintlichen Trendverhaltens hin. Nach Kursanstiegen fallen hier die Wahrscheinlichkeiten weiterer Anstiege, nach Kursrückgängen stiegen sie, vgl. die anwachsende „Scher“ in der nachfolgenden Abbildung.

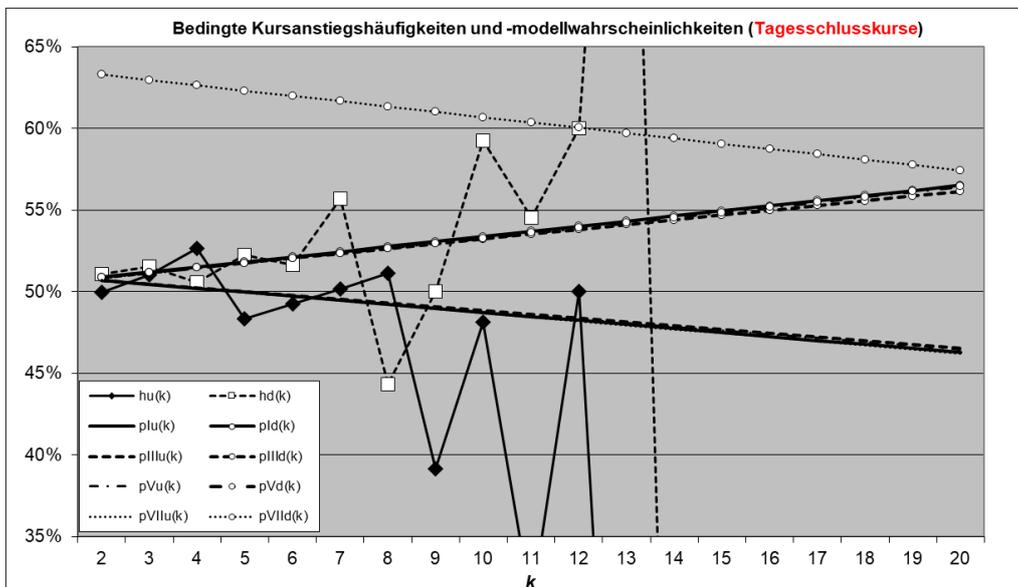


Abb. 10: Bedingte Kursanstieghäufigkeiten und -modellwahrscheinlichkeiten (Tagesschlusskurse)

Die Parameterschätzung in dem Modell für die absoluten relativen Kursveränderungen ist sehr einfach mit der **Momentenmethode**¹⁵ umzusetzen. Für gegebene Stichprobenkennzahlen

- m = arithmetischer Mittelwert > 0 ,
- s = Stichprobenstandardabweichung > 0 und
- γ = Stichprobenschiefe > 0

führt die Momentenmethode für die Parameter des Ansatzes

$$P^{|D|} = c + \Gamma(a, b)$$

ohne auf die mathematischen Details einzugehen auf die folgenden sogenannten **Momentenschätzer**

$$\hat{b} := \frac{4}{\gamma^2}, \quad \hat{a} := \frac{\sqrt{\hat{b}}}{s} = \frac{2}{\gamma \cdot s}, \quad \hat{c} := m - \frac{\hat{b}}{\hat{a}} = \mu - \frac{2 \cdot s}{\gamma}$$

Man beachte, dass diese Anpassung nur für positive Stichprobenschiefen $\gamma > 0$ umsetzbar ist. (Die Forderung positiver arithmetischer Mittelwert ist trivialerweise stets erfüllt, da die absoluten Kursveränderungen betrachtet werden.)

Es sei noch darauf hingewiesen, dass diese Anpassung nicht nur einmal, sondern achtmal vorgenommen wurde, nämlich sowohl für Ticker-Listen als Tagesschlusskurse und für die vier Historienkonstellationen Ups nach Ups („uu“), Ups nach Downs („ud“), Downs nach Ups („du“) und Downs nach Downs („dd“).

3.4 Modellanalysen

3.4.1 Bindungswahrscheinlichkeiten

Für das weitere Vorgehen ist es wünschenswert, dass in den jeweiligen Modellen die Eintrittswahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse exakt berechnet werden können. Es sei für diese Zwecke (modellübergreifend) und für $k = 1, 2, \dots, i$, $i = 2, 3, \dots$

$p_i^u(k) :=$ Wahrscheinlichkeit, dass in t_i ein Kursanstieg der Länge k vorliegt

$p_i^d(k) :=$ Wahrscheinlichkeit, dass in t_i ein Kursrückgang der Länge k vorliegt

Diese **Bindungswahrscheinlichkeiten** können in jedem Modell rekursiv berechnet werden, denn es gilt:

$$p_i^u(1) = P(\text{Kursanstieg der Länge 1 in } t_i) = P\left(\left(Z_{t_{i-1}}, Z_{t_i}\right) = \left(\underset{\text{Down in } t_{i-1}}{d}, \underset{\text{Up in } t_i}{u}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{i-2} \underbrace{p_{i-1}^d(j)}_{\text{Wahrs., dass in } t_{i-1} \text{ genau } j \text{ Kursrückgänge Richtung enden}} \cdot \underbrace{p_d(j)}_{\text{Wahrs., dass nach } j \text{ Downs ein Up folgt}} \quad i = 3, 4, \dots$$

¹⁵ Vgl. etwa Klugman et al. (2008), Kapitel 15.1.

$$p_i^d(1) = P(\text{Kursrückgang der Länge 1 in } t_i) = P\left(\left(Z_{t_{i-1}}, Z_{t_i}\right) = \left(\begin{array}{c} \underline{u} \\ \text{Up in } t_i \end{array}, \begin{array}{c} \underline{d} \\ \text{Down in } t_{i-1} \end{array}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{i-2} \underbrace{p_{i-1}^u(j)}_{\text{Wahrs., dass in } t_{i-1} \text{ genau } j \text{ Kursanstiege enden}} \cdot \underbrace{(1 - p_u(j))}_{\text{Wahrs., dass nach } j \text{ Ups ein Down folgt}} \quad i = 3, 4, \dots$$

Als **Startwerte** wird als Konvention

$$p_2^z(1) = P(\text{Kursanstieg bzw. -rückgang (der Länge 1) in } t_2) = 0,5 \quad , z = u, d$$

gesetzt. Außerdem gilt offenbar

$$p_i^u(k) = p_{i-1}^u(k-1) \cdot p_u(k-1)$$

$$p_i^d(k) = p_{i-1}^d(k-1) \cdot (1 - p_d(k-1)) \quad , k = 2, 3, \dots, i-1; i = 3, 4, \dots$$

Mit diesen **Rekursionen** sind für beliebige Modelle mit gegebenen Vektoren $p_u := (p_u(j): j = 1, 2, \dots)$ und $p_d := (p_d(j): j = 1, 2, \dots)$ sämtliche Wahrscheinlichkeiten $p_i^z(k)$ problemlos zu berechnen.

Die Herleitung expliziter Ausdrücke für die Bindungswahrscheinlichkeiten p_i^u und p_i^d ist sicher nur für spezielle Modellansätze einfach umzusetzen. Dieses Vorgehen wird hier nicht weiterverfolgt. Die numerische Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten reicht für unsere Zwecke.

Exemplarisch sind nachfolgend die Bindungswahrscheinlichkeiten in dem log-linearen Modell aus Abschnitt 3.1.4 (Ticker-Liste Volkswagen) illustriert.¹⁶

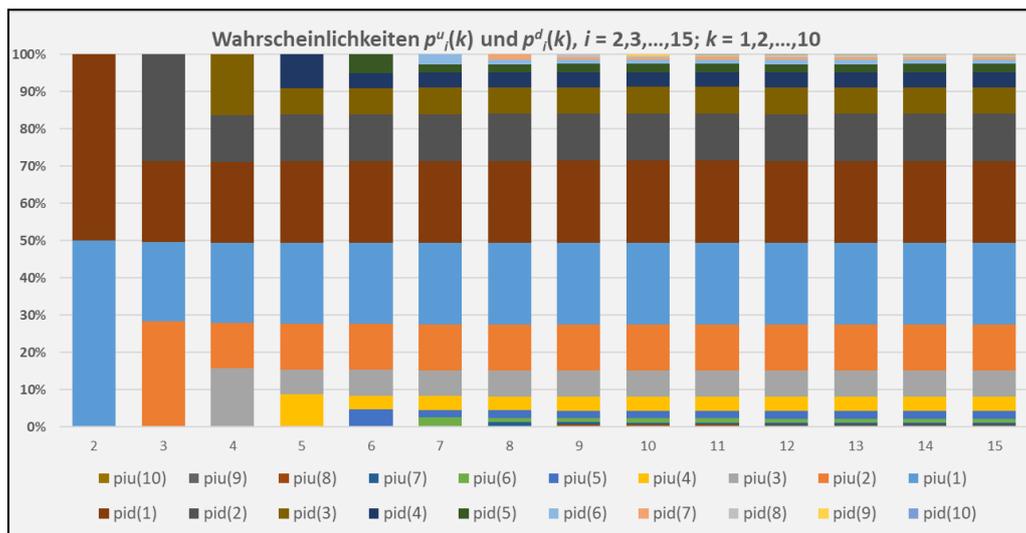


Abb. 11: Bindungswahrscheinlichkeiten im Zeitverlauf (log-lineares Modell, Ticker-Liste VW)

¹⁶ Die zugehörigen Zahlenwerte dieses Beispiels sind im Anhang 3 angegeben.

Ganz offensichtlich streben die Bindungswahrscheinlichkeiten (hier) schon nach wenigen Zeitpunkten gegen stabile Werte. Es liegt eine Art **Stationarität** vor.¹⁷

Für festes m ($\approx k_{\max}$) ist die Lösung

$$\underline{\pi} := (\pi_1^u, \dots, \pi_m^u, \pi_1^d, \dots, \pi_m^d) \in [0,1]^{2m} \text{ mit}$$

$$\pi_k^u := \lim_{i \rightarrow \infty} p_i^u(k) \quad , \quad \pi_k^d := \lim_{i \rightarrow \infty} p_i^d(k)$$

der folgenden **Bestimmungsgleichungen** gesucht:

$$\begin{aligned} (1) \quad \pi_1^u &= \sum_{j=1}^m \pi_j^d \cdot p_d(j) \\ (2) \quad \pi_1^d &= \sum_{j=1}^m \pi_j^u \cdot (1 - p_u(j)) \\ (3) \quad \pi_k^u &= \pi_{k-1}^u \cdot p_u(k-1) \quad , k = 2, 3, \dots, m \\ (4) \quad \pi_k^d &= \pi_{k-1}^d \cdot (1 - p_d(k-1)) \quad , k = 2, 3, \dots, m \\ (5) \quad \sum_{k=1}^m (\pi_k^u + \pi_k^d) &= 1 \end{aligned}$$

Dieses (überbestimmte) lineare Gleichungssystem mit $2m$ Variablen und $2m+1$ Gleichungen kann (ohne Angabe von Details) mit Techniken aus dem Umfeld der Markow-Ketten (näherungsweise) gelöst werden.

3.4.2 Erwartete relative Kursveränderungen

Der Erwartungswert

$$E[D_i] = E\left[\frac{X_{t_i}}{X_{t_{i-1}}}\right] - 1 \quad , i = 2, \dots, n,$$

der relativen Kursveränderung in einem beliebigen Zeitpunkt bzw. für beliebiges i ist eher aufwendig zu berechnen. Deutlich einfacher wird die Berechnung unter der Zugrundelegung der quasi-stationären Verteilung aus Abschnitt 3.4.1. Dann gilt nämlich (im Sinne einer Näherung)

¹⁷ Im engen Sinne mathematischen Sinne können diese Gegebenheiten nicht wirklich gegen einen stationären Zustand streben, denn für wachsendes i kommt stets eine neue mögliche Bindung der Länge $i-1$ mit positiver Wahrscheinlichkeit hinzu. Abgesehen von diesen asymptotisch vernachlässigbaren Effekten kann es aber sehr sowohl so etwas wie **Quasi-Stationarität** geben.

$$\begin{aligned}
 E[D_i] &= E\left[E\left[D|B_{t_i}\right]\right] \\
 &= \sum_{z \in \{u,d\}} \sum_{k=1}^m E\left[D|B_{t_i}=(z,k)\right] \cdot P\left(B_{t_i}=(z,k)\right) \\
 &\approx \sum_{k=1}^m E\left[D|B_{t_i}=(u,k)\right] \cdot \pi_k^u + \sum_{k=1}^m E\left[D|B_{t_i}=(d,k)\right] \cdot \pi_k^d \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\mu^{uu} \cdot p_u(k) - \mu^{du} \cdot (1 - p_u(k))\right) \cdot \pi_k^u + \sum_{k=1}^m \left(\mu^{ud} \cdot p_d(k) - \mu^{dd} \cdot (1 - p_d(k))\right) \cdot \pi_k^d \\
 &= \left(\mu^{uu} + \mu^{du}\right) \cdot \sum_{k=1}^m p_u(k) \cdot \pi_k^u - \mu^{du} \cdot \sum_{k=1}^m \pi_k^u + \left(\mu^{ud} + \mu^{dd}\right) \cdot \sum_{k=1}^m p_d(k) \cdot \pi_k^d - \mu^{dd} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^m \pi_k^d}_{=1 - \sum_{k=1}^m \pi_k^u} \\
 &= \left(\mu^{uu} + \mu^{du}\right) \cdot \sum_{k=1}^m p_u(k) \cdot \pi_k^u + \left(\mu^{ud} + \mu^{dd}\right) \cdot \sum_{k=1}^m p_d(k) \cdot \pi_k^d - \mu^{dd} - \left(\mu^{du} - \mu^{dd}\right) \cdot \sum_{k=1}^m \pi_k^u
 \end{aligned}$$

Die Formel ist insbesondere für Modellüberprüfungen im Umfeld der Simulationen hilfreich.

4. Simulation

Simulationen können nach den vorgenommenen Modellierungen aus Kapitel 3 nun sehr einfach umgesetzt werden. Im Folgenden werden wir zwecks Vereinfachung auf die Simulation der **Zeitpunkte** t_i verzichten, so dass statt der Indizierung mit t_i hier auf i übergegangen werden kann.

Ausgehend von einem (beliebig gewählten) Startkurs X_0 (etwa $X_0 = 100$) wird zunächst - mangels Existenz ausnahmsweise ohne Berücksichtigung einer Historie - die Richtung der ersten Kursbewegung Z_1 simuliert, und zwar vereinfachend gemäß einer $Bin(1;50\%)$ -Verteilung.

Anschließend ist die erste absolute relative Kursveränderung $|D_1|$ zu simulieren. Die Simulation gamma-verteilter Zufallsvariablen ist für beliebige Parameter aus theoretischer Sicht eher unbefriedigend gelöst und operiert meist mit sogenannten Verwerfungsverfahren.¹⁸ Für unsere Zwecke, die weniger auf die exakte Modellierung der Kursveränderungen ausgerichtet ist, begnügen wir uns damit approximative Berechnung der **(Pseudo-)Inversen**¹⁹ der Verteilungsfunktion einer Gamma-Verteilung zu nutzen, die in Excel® mit der Funktion **GAMMAINV** erfolgt. Für eine stetig-gleichverteilte Zufallsvariable $U \sim U(0,1)$ (Pseudo-zufallszahl) ist dann

$$|D_1| := c + \text{GAMMAINV}(U; b; 1/a) \sim c + \Gamma(a, b).^{20}$$

Der Kurs X_1 resultiert dann gemäß

$$X_1 = \begin{cases} X_0 \cdot (1 + |D_1|) & Z_1 = u \\ X_0 \cdot (1 - |D_1|) & Z_1 = d \end{cases}$$

wobei bei der Simulation von $|D_1|$ durch die Wahl der Verteilungsparameter a , b und c berücksichtigt wird, ob es sich um einen Kursanstieg oder -rückgang handelt.

Die **Simulation des i -ten Kurses X_i** erfolgt nun für $i = 2, 3, \dots$ wie folgt rekursiv:

- Zwar ist die gesamte (simulierte) Historie bekannt, relevant für die Simulation von X_i ist aber explizit der realisierte **Zustand** $Z_{i-1} = z$, der angibt in welche Richtung die vorherige Kursbewegung verlief, und die **Länge** $K_{i-1} = k$ dieser vorherigen gleichgerichteten Kursbewegung.
- Mit diesen gegebenen Größen (z, k) wird die bedingte (Modell-)Wahrscheinlichkeit $p_z(k)$ bestimmt.
- Es wird eine **$Bin(1; p_z(k))$** -verteilte Zufallszahl generiert. Das Ergebnis 1 ($U_i \leq p_z(k)$) kennzeichnet einen Kursanstieg, 0 ($U_i > p_z(k)$) einen Kursrückgang. Formal gilt also mit einer Pseudozufallszahl U_i

¹⁸ Vgl. Heilmann & Schröter (2013), S. 347 ff., und Ross (2012), S. 73 ff.

¹⁹ Vgl. etwa Heilmann & Schröter (2013), S. 125 f.

²⁰ Man beachte die Unterschiede der hier gewählten Parametrisierung mit der in Excel®.

$$Z_i = \begin{cases} u & \text{falls } U_i \leq p_z(k) \\ d & \text{falls } U_i > p_z(k) \end{cases} \quad \text{und} \quad K_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } Z_i \neq Z_{i-1} \\ k+1 & \text{falls } Z_i = Z_{i-1} \end{cases}.$$

- Mit den Realisierungen (z,y) der Größen (Z_{i-1}, Z_i) werden die drei zug. empirischen Momente $m^{zy}, s^{zy}, \gamma^{zy}$ der Verteilung der absoluten relativen Kursveränderungen bestimmt.
- Mit der Momentenmethode ergeben sich daraus die Verteilungsparameter

$$\hat{b}_i := \frac{4}{(\gamma^{zy})^2}, \quad \hat{a}_i := \frac{2}{\gamma^{zy} \cdot s^{zy}}, \quad \hat{c}_i := m^{zy} - \frac{2 \cdot s^{zy}}{\gamma^{zy}}.$$

- Mit einer (weiteren) Pseudozufallszahl V_i wird die absolute relative Kursveränderung $|D_i|$ gemäß

$$|D_i| := \hat{c}_i + \text{GAMMAINV}(V_i; \hat{b}_i; 1/\hat{a}_i) \sim \hat{c}_i + \Gamma(\hat{a}_i, \hat{b}_i)$$

generiert.

- Der Kurs X_i ergibt sich schließlich durch

$$X_i = \begin{cases} X_{i-1} \cdot (1 + |D_i|) & Z_i = u \\ X_{i-1} \cdot (1 - |D_i|) & Z_i = d \end{cases}$$

Die nachfolgende Grafik illustriert rein exemplarisch einen Verlauf für 1000 simulierte Tagesschlusskurse, also einen etwa 4-jährigen Zeitraum mit 250 Börsentagen p.a.

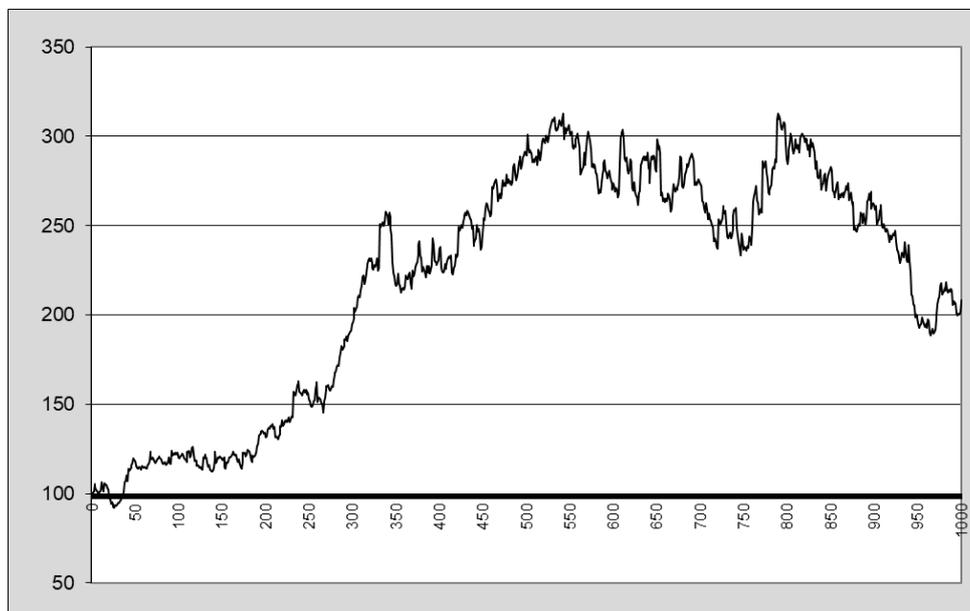


Abb. 12: Simulierter Kursverlauf – Tagesschlusskurse in einem ca. 4-jährigen Zeitraum

5. Bewertung ausgewählter Anlagestrategien

Auch wenn die Zielsetzung dieser Arbeit vornehmlich die Modellierung der Entwicklung von Kursverläufen ist, also nicht etwa die Entwicklung erfolgreicher Anlagestrategien, sollen die hergeleiteten Modelle zur Bewertung von exemplarisch ausgewählter Anlagestrategien verwendet werden. Dabei steht das methodische Vorgehen im Vordergrund, weniger die Ergebnisse der Bewertung.

Die Bewertung einer beliebigen Anlagestrategie erfolgt hier am einfachsten mit Hilfe der Simulationstechnik basierend auf den hergeleiteten Modellen. In die in Kapitel 4 beschriebene Methodik der Simulation können die meisten Strategien sehr einfach integriert werden.

Eine Kategorie von Anlagestrategien könnte etwa sein, das betrachtete Wertpapier genau dann

- zu **kaufen**, wenn es zuvor genau k Kursbewegungen der Kursrichtung y gab, und
- zu **verkaufen**, wenn es zuvor genau l Kursbewegungen der Kursrichtung z gab.

Eine solche Strategie wird mit $S_l^{yz}(k,l)$ bezeichnet. Die Bewertung einer Anlagestrategie mit Hilfe der Simulationstechnik erfolgt z.B. durch die Bestimmung der arithmetischen Mittelwerte geeigneter Kennzahlen. Die folgende Tabelle illustriert dieses Vorgehen. Hier wurden exemplarisch für fünf Anlagestrategien $S_l^{ud}(k,k)$, $k = 1, \dots, 5$, in jeweils 1000 simulierten 4 Jahreszeiträumen die erzielten Performances ausgewertet. Die Modelle bezogen sich auf Tagesschlusskurse. Zum Vergleich wurde auch die bekannte **buy-and-hold-Strategie** betrachtet, bei der das Wertpapier sofort zu Beginn gekauft und unabhängig von irgendwelchen Ereignissen bis zum Ablauf gehalten wird.²¹

	<i>buy and hold</i>	$S_l^{ud}(1;1)$	$S_l^{ud}(2;2)$	$S_l^{ud}(3;3)$	$S_l^{ud}(4;4)$	$S_l^{ud}(5;5)$
Mittelwert	43,11%	34,32%	22,53%	14,22%	17,93%	19,58%
Standardabweichung	98,14%	57,16%	60,38%	53,89%	58,43%	57,16%
Minimum	-82,30%	-63,59%	-71,77%	-74,79%	-73,00%	-68,76%
Maximum	656,17%	338,39%	466,53%	327,73%	365,60%	469,49%

Abb. 13: Simulationsauswertungen für S_l^{ud} -Strategien – Tagesschlusskurse 4 Jahre

Offenbar wies die *buy-and-hold*-Strategie zwar gegenüber den fünf anderen Strategien im Mittel die höheren mittleren und maximalen Performances (43,11% bzw. 656,17%) auf, allerdings bei höherem Risiko. Denn die Standardabweichungen und Mindestperformances waren bei den getesteten Strategien jeweils geringer.

Die folgende Grafik vergleicht exemplarisch die Verläufe bei der *buy-and-hold*-Strategie und bei $S_l^{ud}(5,5)$. Bei Letzterer wird erst gekauft, wenn 5 Ups nacheinander erfolgen und man verkauft nach 5 aufeinander folgenden Downs. Dadurch werden viele der Kursbewegungen nicht mitgegangen. Die Volatilität fällt, aber im Mittel sinkt auch die erwartete Rendite.

²¹ Fett gedruckt sind die besten Werte und diejenigen, die besser als bei *buy-and-hold* sind.

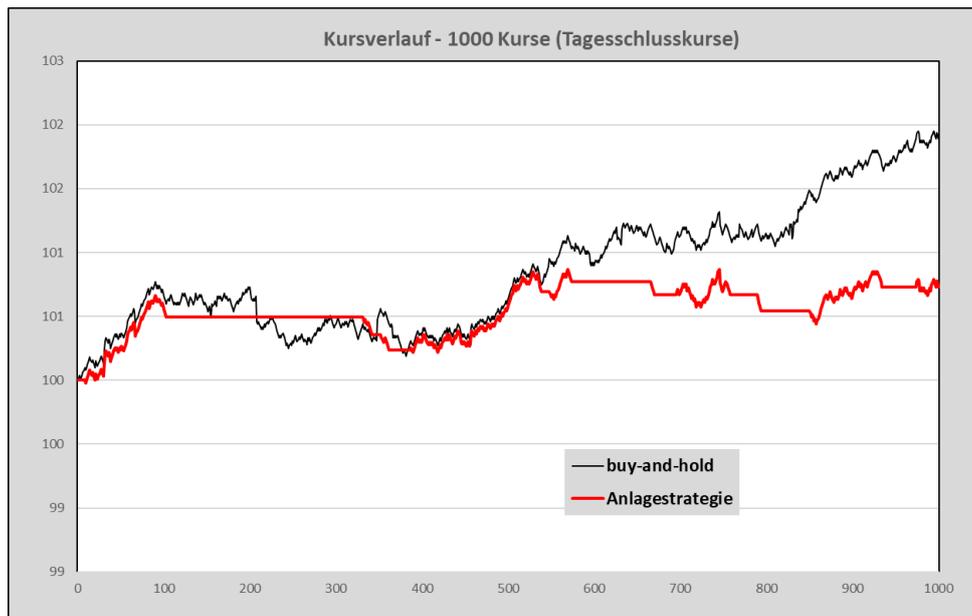


Abb. 14: Beispielhafter Vergleich *buy-and-hold* versus Strategie $S_{II}^{ud}(5,5)$

In Anlehnung an die Modellbildung aus Kapitel 3 bietet es sich auch an, Strategien zu betrachten, bei denen Käufe und Verkäufe erfolgen, wenn die (modellierten) Anstiegs- bzw. Rückgangswahrscheinlichkeiten vorgegebene Niveaus p bzw. q überschreiten. Solche Strategien bezeichnen wir hier mit $S_{II}(p,q)$. Auswertungen von Simulationen ergaben hier die folgenden Kennzahlen:

	<i>buy and hold</i>	$S_{II}(50\%,50\%)$	$S_{II}(50,5\%,50,5\%)$	$S_{II}(51\%,51\%)$
Mittelwert	43,11%	37,96%	45,69%	40,67%
Standardabweichung	98,14%	96,27%	105,48%	95,96%
Minimum	-82,30%	-86,53%	-84,48%	-85,30%
Maximum	656,17%	844,83%	1144,18%	914,48%

Abb. 15: Simulationsauswertungen für S_{II} -Strategien – Tagesschlusskurse 4 Jahre

Offenbar sind bei diesen Strategien ähnliche Renditen wie bei *buy-and-hold* möglich. Die Verläufe sind zudem relativ ähnlich. Bei schwankenden Mittelwerten und Standardabweichungen sind die Präferenzen nicht eindeutig.

Eine weitere bekannte Anlagestrategie operiert mit Gewinnabsicherungen und Verlustbegrenzungen durch *Stop-Loss*-Techniken. Mit $S_{III}(p,x,l)$ wird eine solche Strategie bezeichnet, die Käufe vornimmt, wenn die anschließende Anstiegswahrscheinlichkeit p überschreitet, und Verkäufe tätigt, wenn entweder ein prozentualer Gewinn von x oder ein prozentualer Verlust von l überschritten wird. Hier sind natürlich sehr viele Konstellationen denkbar. Grundsätzlich reduzieren solche Techniken sowohl die erwartete Rendite wie das Risiko, etwa gemessen durch die Standardabweichung, s. folgende Tabelle mit sechs Beispielen.

	buy and hold	S _{III} (50%,...)			S _{III} (51%,...)		
		x=1%,l=3%	x=3%,l=5%	x=5%,l=10%	x=1%,l=3%	x=3%,l=5%	x=5%,l=10%
Mittelwert	43,11%	28,59%	32,69%	33,87%	9,77%	17,09%	21,12%
Standardabweichung	98,14%	75,95%	84,81%	94,48%	33,98%	46,89%	61,33%
Minimum	-82,30%	-81,25%	-85,79%	-79,67%	-63,60%	-74,54%	-80,56%
Maximum	656,17%	432,79%	514,79%	853,70%	163,46%	258,23%	332,66%

Abb. 16: Simulationsauswertungen für S_{III}-Strategien – Tagesschlusskurse 4 Jahre

Die folgende Abbildung illustriert die Effekte anhand eines exemplarischen Verlaufs bei der Strategie S_{III}(51%;5%;10%):

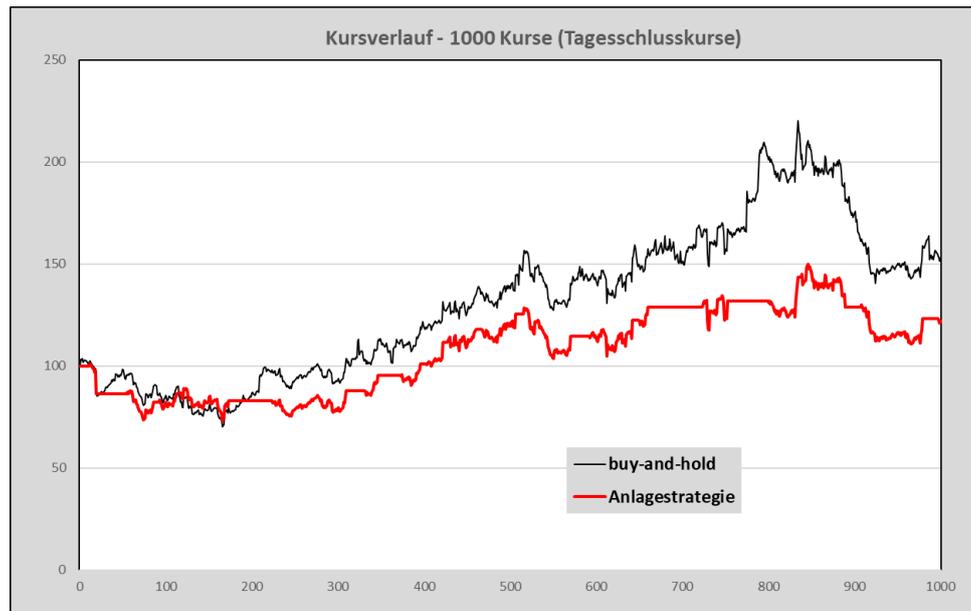


Abb. 17: Beispielhafter Vergleich buy-and-hold versus Strategie S_{III}(51%;5%,10%)

Bei den Ticker-Listen ist das Vorgehen der Bewertung von Anlagestrategien methodisch entsprechend, die Ergebnisse sind selbstverständlich andere.

Selbstverständlich gibt es eine Fülle weiterer Anlagestrategien.²² Es geht hier aber nicht um das Aufzeigen konkreter Anlagestrategien, sondern um das methodisch instrumentalisierte Bewerten solcher (gegebenen) Strategien.

²² Vgl. etwa Cao (2018).

6. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden spezielle Modelle für Kursentwicklungen vorgestellt. Der charakteristische Ansatz besteht bei diesen Modellen darin, die Wahrscheinlichkeit einer Kursrichtung in Abhängigkeit von der Anzahl der zuvor gleichgerichteten Kursbewegungen zu modellieren. Dadurch soll insbesondere ein Trendverhalten erfasst werden. Die Kursbewegungen sind auf Ups und Downs reduziert, d. h. Kurskonstanzen (Equals) werden in den Modellen ignoriert bzw. bereinigt. Für die absolute der Länge der Kursbewegungen (relative UPs und Downs) wurden Modellansätze mit verschobenen Gamma-Verteilungen gewählt.

Für die Generierung konkreter Modelle waren geeignete Daten erforderlich. Hierfür wurden die Kursentwicklungen von neun DAX-Unternehmen betrachtet, und zwar einerseits in Form von Ticker-Listen, d.h. dem Tagesverlauf eines ausgewählten repräsentativen Börsentages (5.8.2019), und andererseits in Form der Tagesschlusskurse seit 1990 bis Juli 2019. Diese Daten wurden herangezogen, um die verschiedenen Modelle zu kalibrieren, d.h. insbesondere die Modellparameter geeignet zu schätzen.

Nach dem Vorliegen konkreter Modelle stand ein relativ einfach einzusetzendes Instrument zur Simulation von Kursentwicklungen zur Verfügung. Mit Hilfe der Simulationstechnik konnten abschließend in Form einer Anwendung ausgewählte Anlagestrategien bewertet werden.

Das in dieser Studie präsentierte Vorgehen weist an mehreren Stellen umfangreiche Ausbaustufen auf, von denen nachfolgend einige genannt seien:

- Die Datengrundlage kann erheblich ausgebaut werden. Hier bestand sie aus lediglich neun Wertpapieren und den Tagesschlusskursen seit 1990 bzw. den Ticker-Listen eines Tages. Weitere Wertpapiere, bestimmte Wertpapierkategorien und andere Zeiträume (etwa Monatsschlusskurse) könnten betrachtet werden.
- Die Modellbildung könnte mit weiteren Ansätzen für die Kursanstiegswahrscheinlichkeiten und die absoluten Längen der Kursbewegungen ausgebaut. In die Modelle könnten **Tagegeldzinsen** und vor allem **Kosten der Transaktionen** integriert werden.
- Die **Güte der Modellbildungen** („*goodness of fit*“) kann geeignet überprüft werden.
- Es könnten sehr viel mehr Anlagestrategien untersucht werden.
- Außerdem könnte man untersuchen, inwieweit rein analytische Untersuchungen - also ohne den Einsatz von Simulationstechniken - die Vorteilhaftigkeit bestimmter Anlagestrategien in den jeweiligen Modellen klären könnten.

Insgesamt stellt diese Arbeit dar, wie ausgehend von spezifischen Vorstellungen über die Mechanismen von Kursentwicklungen entsprechende wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle hergeleitet und ihre Parameter geschätzt werden können, so dass im Ergebnis ein handhabbares Tool zur Simulation der Kurse und damit der Bewertung beliebiger Anlagestrategien zur Verfügung steht.

Anhang 1: Daten der statistischen Analysen

1. Auswertungen für Up-Jp-Bewegungen																
Ticker-Listen (5.8.2019)																
Relative Häufigkeiten der Ups																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
Allianz	46,91%	46,43%	47,93%	44,44%	56,33%	52,38%	54,55%	33,33%	50,00%	100,00%	0,00%					
BASF	51,49%	51,17%	47,17%	46,86%	39,02%	34,38%	36,36%	75,00%	0,00%							
Bayer	48,62%	51,15%	50,90%	52,94%	63,33%	52,63%	56,67%	77,78%	71,43%	40,00%	0,00%					
BMW	52,23%	51,15%	51,04%	48,98%	56,94%	51,22%	52,38%	72,73%	50,00%	50,00%	100,00%	100,00%	100,00%	50,00%	100,00%	
Deutsche Bank	54,51%	56,80%	59,58%	60,45%	52,66%	48,48%	66,67%	59,38%	63,16%	66,67%	62,50%	100,00%	80,00%	75,00%	66,67%	
Henkel	60,48%	53,73%	51,85%	50,00%	32,14%	55,56%	60,00%	66,67%	50,00%	100,00%	100,00%	0,00%				
RWE	47,31%	42,28%	51,92%	62,96%	64,71%	36,36%	100,00%	25,00%	0,00%							
Siemens	63,69%	52,88%	52,82%	55,34%	46,21%	47,76%	59,38%	47,37%	44,44%	25,00%	100,00%	0,00%				
Volkswagen	56,57%	53,94%	60,31%	55,84%	55,04%	43,66%	45,16%	57,14%	37,50%	33,33%	100,00%	100,00%	100,00%	0,00%		
Anzahl der Beobachtungen																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
Allianz	776	364	169	81	36	21	11	6	2	1	1	0	0	0	0	0
BASF	1.408	725	371	175	82	32	11	4	3	0	0	0	0	0	0	0
Bayer	1.343	663	334	170	90	57	30	17	9	0	5	2	0	0	0	0
BMW	1.078	563	288	147	72	41	21	11	8	4	2	2	2	2	1	0
Deutsche Bank	1.686	919	522	311	188	99	48	32	19	12	8	5	5	4	3	0
Henkel	334	201	108	56	28	9	5	3	2	1	1	1	0	0	0	0
RWE	260	123	62	27	11	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Siemens	1.747	938	496	262	145	67	32	19	9	4	1	1	0	0	0	0
Volkswagen	1.255	710	383	231	129	71	31	14	8	3	1	1	1	1	0	0
Kumulierte Transaktionsstücke																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
Allianz	784.167	1.36.215	60.682	38.804	16.945	8.146	3.167	1.264	59	70	517	0	0	0	0	0
BASF	881.949	419.161	1.257.597	89.602	53.845	16.237	3.552	1.063	874	0	0	0	0	0	0	0
Bayer	805.363	344.930	197.945	80.378	40.347	24.626	6.880	5.562	4.927	2.368	100	0	0	0	0	0
BMW	350.451	161.597	93.577	53.055	25.585	15.599	3.733	2.337	2.319	1.720	315	973	236	1.978	168	0
Deutsche Bank	3.502.765	1.774.405	1.142.910	685.687	363.817	225.663	129.362	59.887	50.600	22.793	25.415	10.367	10.739	10.719	4.697	0
Henkel	302.884	45.483	23.155	10.368	6.209	1.912	679	619	237	329	425	3	0	0	0	0
RWE	844.716	462.199	177.287	66.667	36.944	41.644	12.666	22.814	780	0	0	0	0	0	0	0
Siemens	738.799	351.572	1.315.687	110.697	59.739	26.321	12.555	4.645	1.950	1.219	187	129	0	0	0	0
Volkswagen	242.664	137.410	79.230	38.768	33.958	10.187	6.343	1.976	1.746	123	184	116	19	229	0	0
Kumulierte Transaktionsvolumen																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
Allianz	158.659.605	27.684.192	12.336.900	7.888.335	3.445.605	1.657.701	643.628	256.163	11.988	14.319	105.727	0	0	0	0	0
BASF	50.009.508	23.760.682	71.213.718	5.078.819	3.053.907	920.862	201.248	60.394	49.543	0	0	0	0	0	0	0
Bayer	45.469.845	19.480.438	11.181.296	4.544.795	2.283.676	2.849.513	1.387.970	389.354	314.892	279.318	134.216	5.659	0	0	0	0
BMW	22.183.276	10.230.623	5.928.713	3.359.114	1.620.722	967.409	236.924	148.180	146.826	108.927	20.029	61.990	15.022	125.479	10.710	0
Deutsche Bank	24.293.048	12.306.525	7.929.563	4.756.369	2.522.200	1.563.309	896.863	415.093	351.077	157.983	176.368	71.720	74.374	74.206	32.579	0
Henkel	26.986.967	4.057.351	2.065.578	925.462	555.487	171.602	60.754	55.371	21.183	29.360	37.936	268	0	0	0	0
RWE	20.866.704	11.403.564	4.383.438	1.645.497	913.261	1.026.671	310.680	559.560	19.305	0	0	0	0	0	0	0
Siemens	66.572.905	31.678.395	118.153.822	9.979.035	5.382.571	2.371.800	1.133.191	419.015	175.455	109.810	16.869	11.636	0	0	0	0
Volkswagen	34.707.091	19.648.292	11.342.492	5.546.962	4.862.872	1.457.475	909.682	283.365	250.873	17.713	26.636	16.794	2.751	33.109	0	0

Arbeitspapiere – Hochschule Kaiserslautern, Fachbereich Betriebswirtschaft [Nr. 2/2019]

2. Auswertungen für Up-Down-Bewegungen																
Ticker-Listen (5.8.2019)																
Relative Häufigkeiten der Ups																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
Allianz	51,03%	52,37%	54,14%	55,42%	56,40%	60,00%	66,67%	50,00%	100,00%							
BASF	47,60%	48,17%	50,26%	58,42%	49,37%	47,50%	38,10%	53,85%	33,33%	25,00%	66,67%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	
Bayer	47,69%	47,44%	49,59%	47,85%	46,67%	46,67%	58,33%	40,00%	40,00%	0,00%	100,00%					
BNW	47,69%	50,18%	49,11%	49,65%	52,78%	47,06%	55,56%	37,50%	20,00%	25,00%	100,00%					
Deutsche Bank	47,18%	45,62%	45,45%	40,91%	43,59%	34,09%	46,55%	54,84%	64,29%	60,00%	50,00%	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%	
Henkel	40,12%	46,50%	49,60%	50,91%	55,56%	50,00%	50,00%	33,33%	50,00%	100,00%						
RWE	48,85%	45,86%	54,17%	45,45%	33,33%	41,67%	28,57%	40,00%	0,00%	0,00%	50,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	
Siemens	45,33%	44,40%	44,44%	52,88%	52,52%	54,55%	53,33%	57,14%	33,33%	25,00%	33,33%	50,00%	0,00%	0,00%	0,00%	
Volkswagen	41,51%	43,66%	47,70%	45,37%		49,30%		40,00%	22,22%	28,57%						
Anzahl der Beobachtungen																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
Allianz	778	380	181	83	37	15	6	2	1	0	0	0	0	0	0	0
BASF	1.408	737	382	190	79	40	21	13	6	4	3	1	1	1	1	0
Bayer	1.344	702	369	196	97	60	32	12	6	3	2	2	0	0	0	0
BNW	1.078	564	281	143	72	34	18	8	5	4	3	0	0	0	0	0
Deutsche Bank	1.687	890	484	264	150	88	58	31	14	5	2	1	1	1	1	0
Henkel	334	200	107	55	27	12	6	3	2	1	0	0	0	0	0	0
RWE	260	133	72	33	18	12	7	5	3	2	2	1	1	1	1	0
Siemens	1.747	955	531	295	139	66	30	14	6	4	3	2	1	1	1	0
Volkswagen	1.255	733	413	216	118	71	36	15	9	7	5	3	2	2	2	0
Kumulierte Transaktionsstücke																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
Allianz	290.728	138.147	88.657	31.209	19.082	4.419	2.637	1.413	130	0	0	0	0	0	0	0
BASF	798.945	458.023	243.194	120.316	45.830	23.356	21.065	9.385	19.034	1.275	14.991	100	624	298	12.050	0
Bayer	2.111.059	354.888	201.277	108.013	60.903	37.125	29.719	8.477	1.153	501	509	474	0	0	0	0
BNW	979.892	182.164	111.323	59.228	23.103	7.280	5.117	2.130	8.130	421	1.141	0	0	0	0	0
Deutsche Bank	6.116.272	2.063.059	996.223	637.526	284.998	219.237	147.313	45.822	94.134	3.052	3.065	2.857	900	1.315	163	0
Henkel	75.237	47.218	28.275	10.203	6.615	2.195	1.457	469	220	247	0	0	0	0	0	0
RWE	669.014	379.772	1.174.843	96.942	64.042	38.369	41.936	24.416	33.661	36.962	10.966	2.380	1.409	2.370	179	0
Siemens	737.712	373.224	217.733	134.119	64.883	29.474	17.636	7.863	1.110	1.957	2.861	413	313	313	313	0
Volkswagen	664.846	136.543	80.556	42.165	22.347	14.206	6.396	4.810	2.273	1.086	899	640	333	140	142	0
Kumulierte Transaktionsvolumen																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
Allianz	59.067.309	28.047.654	17.988.594	6.342.968	3.877.282	897.594	535.076	287.886	28.501	0	0	0	0	0	0	0
BASF	45.288.823	25.964.781	13.782.501	6.826.619	2.594.884	1.324.473	1.196.863	531.820	1.080.845	72.270	850.827	5.675	35.408	16.900	683.717	0
Bayer	118.353.259	20.036.289	11.382.925	6.097.988	3.431.440	2.096.736	1.678.881	479.319	64.794	50.579	28.524	26.548	0	0	0	0
BNW	62.057.175	11.534.455	7.035.896	3.743.839	1.480.914	460.035	324.026	134.660	513.066	26.743	72.056	0	0	0	0	0
Deutsche Bank	42.274.604	14.313.663	6.901.912	4.420.765	1.978.071	1.520.396	1.021.105	317.954	651.757	21.257	21.329	19.930	6.278	9.171	1.138	0
Henkel	6.712.789	4.215.198	2.522.115	910.268	589.290	196.012	129.647	43.505	20.573	22.111	0	0	0	0	0	0
RWE	16.524.482	9.383.447	28.813.389	2.388.344	1.575.978	941.369	1.029.969	598.913	822.737	901.891	267.433	58.001	34.323	57.710	4.357	0
Siemens	66.497.794	33.837.501	19.624.209	12.097.525	5.843.556	2.682.483	1.587.546	710.227	100.132	178.379	257.571	37.192	28.132	28.129	28.128	0
Volkswagen	95.041.893	19.521.289	11.512.853	6.030.175	3.194.467	2.028.409	914.561	688.245	324.912	155.811	128.912	91.959	47.934	20.144	20.473	0

Arbeitspapiere – Hochschule Kaiserslautern, Fachbereich Betriebswirtschaft [Nr. 2/2019]

3. Auswertungen für Up-Up-Bewegungen																
Tagesschlusskurse seit 1990																
Relative Häufigkeiten der Ups																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
DAX 30	63,49%	50,30%	55,45%	65,71%	47,44%	51,35%	47,37%	50,00%	66,67%	83,33%	80,00%	25,00%	0,00%			
Allianz	51,02%	51,03%	54,24%	53,91%	52,90%	52,05%	47,37%	66,67%	41,67%	20,00%	0,00%					
BASF	50,86%	48,90%	53,12%	53,28%	49,17%	55,93%	60,61%	30,00%	16,67%	100,00%	0,00%					
Bayer	51,97%	48,77%	40,27%	51,18%	48,19%	53,85%	35,71%	40,00%	25,00%	0,00%						
BMW	51,44%	50,59%	51,17%	60,25%	43,70%	42,37%	44,00%	54,55%	50,00%	43,70%	60,67%	50,00%	100,00%	0,00%		
Deutsche Bank	48,78%	51,51%	53,15%	48,57%	49,58%	57,63%	52,94%	38,89%	71,43%	60,00%	0,00%					
Henkel	50,80%	50,58%	44,35%	55,00%	49,31%	35,09%	65,00%	76,52%	20,00%	50,00%	0,00%					
RWE	50,11%	50,66%	54,27%	53,23%	51,52%	44,12%	40,00%	58,33%	28,57%	50,00%	0,00%					
Siemens	51,46%	49,58%	50,96%	51,25%	43,09%	52,83%	53,57%	53,33%	62,50%	40,00%	100,00%	50,00%	0,00%			
Volkswagen	52,74%	50,27%	52,03%	55,74%	48,53%	50,00%	54,55%	50,00%	33,33%	66,67%	50,00%	0,00%				
Anzahl der Beobachtungen																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
DAX 30	1.877	1.004	505	280	156	74	38	18	9	6	5	4	1	0	0	0
Allianz	1.813	925	472	250	138	73	38	18	12	5	1	0	0	0	0	0
BASF	1.870	951	465	247	120	59	33	20	6	1	0	0	0	0	0	0
Bayer	1.878	975	458	211	108	52	28	10	4	1	0	0	0	0	0	0
BMW	1.802	927	469	240	119	59	25	11	6	3	2	1	0	0	0	0
Deutsche Bank	1.835	897	461	245	119	59	34	18	7	5	3	0	0	0	0	0
Henkel	1.858	945	478	212	118	57	20	13	10	2	1	0	0	0	0	0
RWE	1.804	904	457	248	132	68	30	12	7	2	1	0	0	0	0	0
Siemens	1.848	950	471	240	123	53	28	15	8	5	2	2	1	0	0	0
Volkswagen	1.789	933	469	244	130	66	33	18	9	3	2	1	0	0	0	0
Kumulierte Transaktionsstücke																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
DAX 30	2.908.723.110.452	1.477.742.382.242	638.817.982.232	380.259.521.704	215.024.221.544	106.810.334.504	65.447.899.368	34.481.019.800	16.192.380.432	5.997.901.858	6.779.901.440	7.141.187.380	0	0	0	0
Allianz	248.727.738.559	118.888.570.070	67.724.634.110	33.960.723.201	18.029.029.394	8.317.403.968	4.435.425.810	2.222.993.397	1.388.581.128	371.779.949	0	0	0	0	0	0
BASF	189.838.868.916	90.030.996.701	45.537.835.115	25.003.250.312	11.984.591.950	6.411.816.689	4.915.924.853	2.268.872.800	1.019.655.534	205.535.527	166.576.659	0	0	0	0	0
Bayer	192.198.862.940	98.403.088.410	42.775.583.049	21.391.244.849	13.168.810.705	5.419.252.028	2.339.969.999	1.051.588.783	417.419.702	266.994.323	0	0	0	0	0	0
BMW	118.287.802.559	62.793.489.997	31.917.234.424	16.795.581.893	9.203.281.596	4.199.921.058	1.914.222.119	1.018.373.305	486.041.422	189.164.827	97.003.088	127.528.656	136.839.968	0	0	0
Deutsche Bank	240.094.327.783	120.792.348.117	61.991.110.291	33.283.482.591	17.804.241.935	8.321.583.081	5.562.721.085	1.907.101.604	1.041.696.548	955.310.112	0	0	0	0	0	0
Henkel	42.037.782.284	21.350.813.728	10.416.438.273	5.185.950.915	3.110.848.747	1.281.421.109	437.879.139	368.098.702	334.670.707	155.193.368	27.323.112	0	0	0	0	0
RWE	119.077.860.801	57.808.175.835	30.049.811.588	16.237.277.153	8.516.760.688	4.968.488.529	2.988.347.828	950.194.043	1.248.120.232	176.018.101	103.102.981	0	0	0	0	0
Siemens	289.305.828.012	131.482.735.215	70.132.154.744	39.089.451.983	17.948.973.274	8.791.188.315	3.013.209.838	2.909.548.315	851.008.183	689.973.267	489.718.980	355.845.920	118.332.000	0	0	0
Volkswagen	114.474.968.888	60.888.818.287	32.540.425.880	18.031.354.214	10.537.078.737	5.070.542.313	3.527.401.871	2.055.500.482	1.353.147.011	328.103.875	58.928.759	69.799.881	0	0	0	0
Kumulierte Transaktionsvolumen																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
DAX 30	25.028.272.579.741.100	12.728.715.980.582.800	5.707.990.338.022.300	3.311.844.895.845.390	1.871.967.864.948.240	981.029.863.283.042	625.594.270.280.959	321.053.557.948.109	158.279.044.922.259	54.969.450.120.824	62.981.209.280.703	64.609.795.492.803	0	0	0	0
Allianz	32.915.580.233.600	15.790.947.508.378	9.094.548.252.881	4.594.194.728.871	2.586.497.482.914	1.106.720.958.257	593.489.104.123	299.187.527.385	150.257.908.812	61.988.301.414	0	0	0	0	0	0
BASF	11.378.153.181.987	5.481.067.828.728	2.776.108.750.150	1.538.385.171.902	799.878.457.278	425.044.148.939	321.840.950.892	153.834.401.841	54.175.673.881	13.037.118.478	10.512.891.687	0	0	0	0	0
Bayer	14.202.878.198.247	7.296.551.844.884	3.017.888.840.294	1.491.143.524.134	980.844.548.033	373.373.898.148	134.128.555.742	63.878.316.711	19.340.920.813	13.599.780.369	0	0	0	0	0	0
BMW	7.884.743.870.958	4.038.132.005.858	2.109.259.888.770	1.077.835.137.330	618.941.586.338	288.556.294.438	122.549.408.638	74.830.101.833	27.859.428.984	12.972.973.372	8.919.433.942	11.781.987.948	12.471.487.482	0	0	0
Deutsche Bank	9.917.123.534.777	5.061.773.420.118	2.583.822.875.507	1.510.718.207.298	802.343.280.428	404.728.529.280	227.805.122.025	61.808.032.897	35.943.241.202	36.801.391.291	24.515.936.788	0	0	0	0	0
Henkel	2.989.528.904.387	1.474.348.728.478	727.485.452.794	373.498.858.922	228.837.913.251	83.941.818.105	31.930.582.201	29.040.821.916	27.893.854.863	14.328.977.874	1.145.931.317	0	0	0	0	0
RWE	8.389.199.893.524	3.144.183.258.209	1.633.907.283.042	901.323.898.324	433.365.474.816	248.042.294.842	112.945.918.840	54.139.338.021	68.251.933.103	7.412.233.769	8.488.489.178	0	0	0	0	0
Siemens	21.720.117.487.207	11.178.888.828.088	6.128.945.422.358	3.445.008.309.829	1.596.276.377.577	820.106.538.802	257.403.478.210	258.434.717.998	58.745.088.878	52.589.407.097	40.271.198.368	28.987.494.072	9.873.822.080	0	0	0
Volkswagen	16.225.089.860.447	8.619.945.957.079	4.423.562.991.587	2.391.589.032.491	1.430.158.409.149	699.230.583.281	507.190.413.181	291.717.816.873	213.970.210.170	38.500.588.929	5.278.069.804	8.203.811.646	0	0	0	0

Arbeitspapiere – Hochschule Kaiserslautern, Fachbereich Betriebswirtschaft [Nr. 2/2019]

4. Auswertungen für Up-Down-Bewegungen																
Tagesschlusskurse seit 1990																
Relative Häufigkeiten der Ups																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
DAX 30	53,70%	53,11%	55,28%	55,49%	58,02%	57,58%	64,29%	40,00%	66,67%	0,00%	100,00%					
Allianz	50,19%	51,00%	50,68%	53,67%	51,49%	53,06%	56,52%	40,00%	33,33%	75,00%	0,00%	0,00%	100,00%			
BASF	50,86%	52,77%	55,76%	55,76%	50,00%	52,38%	45,45%	45,45%	66,67%	100,00%						
Bayer	52,08%	51,50%	52,98%	55,61%	41,76%	43,40%	62,07%	54,55%	80,00%	0,00%	100,00%					
BMW	50,44%	49,05%	49,57%	41,03%	60,37%	44,44%	50,00%	40,00%	77,78%	50,00%	100,00%					
Deutsche Bank	49,35%	51,56%	51,66%	50,46%	47,22%	45,61%	61,29%	33,33%	25,00%	50,00%	66,67%					
Henkel	51,78%	52,23%	54,91%	51,30%	52,13%	48,89%	60,87%	44,44%	40,00%	33,33%	50,00%	100,00%				
RWE	49,03%	50,27%	49,89%	52,40%	53,21%	50,98%	56,00%	45,45%	33,33%	25,00%	33,33%	50,00%	100,00%			
Siemens	51,19%	51,83%	50,00%	48,39%	58,93%	62,22%	52,94%	25,00%	50,00%	100,00%						
Volkswagen	49,18%	49,72%	49,78%	48,02%	50,00%	64,41%	52,38%	70,00%	33,33%	100,00%						
Anzahl der Beobachtungen																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
DAX 30	1.877	888	407	182	81	33	14	5	3	1	1	0	0	0	0	0
Allianz	1.813	902	442	218	101	49	23	10	6	4	1	1	1	0	0	0
BASF	1.870	919	434	192	84	42	20	11	6	2	0	0	0	0	0	0
Bayer	1.876	899	436	205	91	53	29	11	5	1	0	0	0	0	0	0
BMW	1.802	893	465	234	138	54	30	15	9	2	1	0	0	0	0	0
Deutsche Bank	1.838	931	451	218	108	57	31	12	8	6	3	1	0	0	0	0
Henkel	1.858	896	428	193	94	45	23	9	5	3	2	1	0	0	0	0
RWE	1.803	919	457	229	109	51	25	11	6	4	3	2	1	0	0	0
Siemens	1.848	901	434	217	112	45	17	8	6	3	3	0	0	0	0	0
Volkswagen	1.789	898	452	217	118	59	27	10	6	2	0	0	0	0	0	0
Kumulierte Transaktionsstücke																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
DAX 30	2.896.538.059.119	1.386.283.087.987	621.102.811.227	296.508.698.728	147.110.177.832	75.900.737.704	47.580.530.320	9.732.892.738	11.812.883.778	8.645.629.832	7.210.195.466	0	0	0	0	0
Allianz	251.788.533.873	123.158.419.924	60.877.019.399	34.981.017.103	18.789.690.225	9.529.061.581	6.251.120.523	2.280.512.162	1.113.656.243	885.296.789	0	0	0	0	0	0
BASF	190.370.138.160	97.983.445.382	44.913.097.684	21.485.325.210	10.983.794.239	5.978.485.245	2.748.885.231	1.361.761.280	1.039.242.557	333.716.544	0	0	0	0	0	0
Bayer	193.125.774.384	96.972.288.804	48.993.620.971	21.718.554.418	9.886.715.160	7.449.036.823	5.387.790.315	1.373.988.587	1.014.737.257	471.707.168	378.459.808	0	0	0	0	0
BMW	115.394.784.241	61.287.035.437	30.191.861.915	16.417.805.100	11.318.155.373	4.082.775.545	1.839.553.885	1.217.044.941	1.025.094.652	638.094.886	101.938.859	0	0	0	0	0
Deutsche Bank	238.980.202.745	133.335.359.127	68.273.849.634	35.331.807.185	18.417.805.100	12.467.837.332	4.927.775.545	1.839.553.885	1.217.044.941	1.025.094.652	638.094.886	101.938.859	0	0	0	0
Henkel	413.379.354.332	19.708.721.789	9.134.544.570	4.178.258.512	2.097.822.529	972.280.498	718.417.738	354.290.055	244.608.312	202.275.875	98.282.110	258.011.285	0	0	0	0
RWE	118.204.838.897	62.672.790.688	32.808.981.838	17.842.058.258	8.021.751.086	4.238.155.915	2.275.732.315	2.020.284.505	1.144.788.478	340.831.512	220.443.072	0	0	0	0	0
Siemens	259.570.967.600	133.914.231.897	63.900.824.114	33.789.862.057	20.948.586.833	9.541.079.195	3.859.356.981	2.138.588.152	1.889.232.111	1.110.921.968	0	0	0	0	0	0
Volkswagen	118.678.785.329	62.094.833.873	31.831.151.729	16.580.532.468	10.980.313.506	4.777.793.988	1.827.553.377	911.214.289	202.899.584	241.309.284	0	0	0	0	0	0
Kumulierte Transaktionsvolumen																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	30
DAX 30	25.055.779.839.092.200	11.927.989.287.743.800	5.110.902.325.774.960	2.418.994.578.812.950	1.184.532.109.930.450	637.872.511.428.425	376.999.799.921.000	98.390.279.588.489	68.914.489.771.561	49.532.872.972.861	41.802.281.787.433	0	0	0	0	0
Allianz	33.322.506.800.703	15.828.032.827.828	7.598.807.892.390	4.348.008.300.242	2.127.304.287.822	1.152.863.874.373	660.389.480.075	251.964.293.073	112.734.778.419	97.790.210.537	0	0	0	0	0	0
BASF	11.389.085.289.382	5.806.640.724.818	2.892.449.535.348	1.290.835.868.460	629.975.886.874	361.895.831.578	188.330.148.596	101.330.372.986	76.368.708.083	29.797.850.214	0	0	0	0	0	0
Bayer	14.343.454.068.500	7.056.670.758.596	3.542.865.988.868	1.851.828.395.441	745.118.113.933	572.964.814.195	433.798.870.798	83.777.023.278	58.163.217.972	19.731.038.130	16.454.531.184	0	0	0	0	0
BMW	7.572.416.784.129	3.994.788.182.578	1.943.199.078.960	1.208.448.220.118	759.289.080.108	277.822.759.844	128.328.159.514	78.542.753.892	58.143.199.927	35.354.454.488	3.884.822.981	0	0	0	0	0
Deutsche Bank	9.904.586.135.858	5.538.305.600.585	2.886.301.535.091	1.478.540.791.969	1.050.191.816.110	492.198.428.063	387.887.208.399	128.020.378.057	52.598.408.342	39.412.954.831	7.848.859.987	3.584.748.538	0	0	0	0
Henkel	2.962.947.702.924	1.390.289.494.913	646.311.529.979	296.367.587.432	148.864.888.724	71.782.478.849	48.089.827.038	19.301.950.114	7.908.847.067	7.472.432.944	3.114.908.887	0	0	0	0	0
RWE	8.287.034.549.452	3.387.730.151.286	1.728.241.290.003	930.228.989.183	407.967.710.758	211.941.124.583	125.693.841.833	114.137.197.050	58.563.737.960	7.348.872.269	5.785.894.903	0	0	0	0	0
Siemens	21.871.948.121.154	11.188.841.527.010	5.325.637.800.082	2.794.570.249.822	1.556.212.701.288	748.901.317.789	321.561.178.389	178.858.978.224	153.878.685.045	85.505.845.850	0	0	0	0	0	0
Volkswagen	18.307.507.937.229	8.731.072.828.448	4.457.294.441.590	2.320.448.872.547	1.429.931.491.081	727.942.428.459	289.960.003.015	158.180.708.740	31.855.234.668	37.897.819.911	0	0	0	0	0	0

Anhang 2: Daten der Parameterschätzung

Parameterübersicht für Ticker-Listen																	
		Modell I				Modell III				Modell V				Modell VII			
		a_u	b_u	a_d	b_d	a_u	b_u	a_d	b_d	a_u	b_u	a_d	b_d	a_u	b_u	a_d	b_d
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Allianz	1	0,46077	0,00556	0,48993	0,01831	-0,15818	0,02277	-0,03027	0,06735	-0,77972	0,01437	-0,70817	0,03276	0,79418	0,00172	-0,60559	-0,02242
BASF	2	0,54485	-0,02377	0,47744	0,00506	0,16344	-0,08588	-0,10091	0,02616	-0,61088	-0,04403	-0,75010	0,01563	0,88752	-0,02909	-0,69078	-0,01362
Bayer	3	0,47535	0,01447	0,47581	0,00069	-0,11282	0,06588	-0,09521	0,00189	-0,74692	0,03066	-0,74574	0,00262	0,80236	0,01790	-0,72949	-0,00515
BMW	4	0,50568	0,00657	0,47875	0,00422	0,06333	0,00439	-0,06020	0,00302	-0,68091	0,01197	-0,72606	0,00257	0,88242	-0,01506	-0,70970	-0,00548
Deutsche Bank	5	0,54058	0,00999	0,47243	-0,00659	0,21600	0,01479	-0,11701	-0,02332	-0,61307	0,01652	-0,75580	-0,01184	0,93598	-0,01354	-0,79051	0,00377
Henkel	6	0,61011	-0,02580	0,38786	0,02809	0,46323	-0,11436	-0,43386	0,10294	-0,49816	-0,04513	-0,93509	0,05898	0,99910	-0,04784	-0,73506	-0,03583
RWE	7	0,44690	0,01616	0,51432	-0,01891	-0,21409	0,06361	-0,01551	-0,03680	-0,80017	0,02842	-0,74973	0,00538	0,83404	-0,02095	-0,68785	-0,02164
Siemens	8	0,54523	-0,00702	0,44753	0,00564	0,18123	-0,02816	-0,24726	0,04136	-0,60638	-0,01339	-0,83886	0,02939	0,89068	-0,01022	-0,72556	-0,02347
Volkswagen	9	0,57501	-0,00769	0,42197	0,00547	0,31171	-0,03594	-0,32142	0,02542	-0,55281	-0,01451	-0,87447	0,01761	0,93685	-0,01554	-0,80166	-0,01454
Aggregat-Liste	10	0,52208	0,00238	0,46464	0,00233	0,09404	0,00670	-0,15275	0,01511	-0,64908	0,00401	-0,77945	0,01160	0,86589	-0,00044	-0,73516	-0,00932

Parameterübersicht für Tagesschlusskurse																	
		Modell I				Modell III				Modell V				Modell VII			
		a_u	b_u	a_d	b_d	a_u	b_u	a_d	b_d	a_u	b_u	a_d	b_d	a_u	b_u	a_d	b_d
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
DAX 30	1	0,53179	-0,00101	0,52158	0,01034	0,12125	-0,00070	0,08630	0,04167	-0,63124	-0,00258	-0,65260	0,02039	0,87041	-0,00073	-0,58850	-0,01481
Allianz	2	0,51067	0,00288	0,49981	0,00389	0,03975	0,01315	-0,00547	0,01830	-0,67111	0,00489	-0,69884	0,01063	0,84545	0,00351	-0,66048	-0,00898
BASF	3	0,50947	-0,00254	0,50499	0,00920	0,04109	-0,01205	0,02903	0,03155	-0,66913	-0,00839	-0,68056	0,01602	0,84688	-0,00466	-0,62866	-0,01150
Bayer	4	0,52204	-0,01352	0,52055	-0,00038	0,08512	-0,05239	0,08097	-0,00070	-0,65019	-0,02728	-0,65184	-0,00171	0,85949	-0,01638	-0,65244	-0,00140
BMW	5	0,52043	-0,00493	0,49886	-0,00141	0,08118	-0,01944	-0,00238	-0,00683	-0,65433	-0,00933	-0,68956	-0,00703	0,86102	-0,00797	-0,70759	0,00189
Deutsche Bank	6	0,49087	0,00524	0,50068	0,00048	-0,04973	0,02835	0,00887	-0,00155	-0,72026	0,01503	-0,68624	-0,00248	0,82255	0,00583	-0,69061	-0,00029
Henkel	7	0,51376	-0,00711	0,51888	0,00182	0,05167	-0,02662	0,08121	0,00406	-0,65784	-0,01978	-0,65379	0,00202	0,84802	-0,00777	-0,64539	-0,00238
RWE	8	0,50843	-0,00019	0,48941	0,00435	0,03018	0,00121	-0,03560	0,01364	-0,67696	-0,00042	-0,71048	0,00638	0,84294	-0,00030	-0,68745	-0,00519
Siemens	9	0,51271	-0,00286	0,50478	0,00482	0,05401	-0,01329	0,03342	0,01102	-0,66989	-0,00487	-0,67700	0,00529	0,85821	-0,00916	-0,65494	-0,00616
Volkswagen	10	0,52651	-0,00330	0,47889	0,00910	0,10159	-0,01075	-0,07705	0,03230	-0,64377	-0,00533	-0,73056	0,01521	0,86495	-0,00413	-0,67811	-0,01128
Aggregat-Liste	11	0,51198	-0,00246	0,50258	0,00313	0,04696	-0,00931	0,01161	0,01180	-0,66960	-0,00483	-0,68735	0,00579	0,84705	-0,00299	-0,66863	-0,00379

Anhang 3: Bindungswahrscheinlichkeiten

Bindungswahrscheinlichkeiten: Loglineares Modell, Ticker-Liste, Volkswagen

i	$p_i^u(k)$:= Wahrscheinlichkeit, dass in t_i ein Kursanstieg der Länge k vorliegt										Summe	$p_i^d(k)$:= Wahrscheinlichkeit, dass in t_i ein Kursrückgang der Länge k vorliegt										Summe	
	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	k	1	2	3	4	5	6	7	8		9
2	0,5										50,00%	0,5											50,00%
3	0,21225	0,28352									49,58%	0,21648	0,28775										50,42%
4	0,21621	0,12035	0,15845								49,50%	0,21696	0,12458	0,16343									50,50%
5	0,21779	0,12260	0,06726	0,08728							49,49%	0,21787	0,12486	0,07076	0,09157								50,51%
6	0,21853	0,12349	0,06852	0,03705	0,04738						49,50%	0,21848	0,12539	0,07092	0,03965	0,05059							50,50%
7	0,21889	0,12391	0,06902	0,03774	0,02011	0,02535					49,50%	0,21883	0,12574	0,07122	0,03973	0,02190				0,02755			50,50%
8	0,21906	0,12412	0,06925	0,03802	0,02049	0,01076	0,01337				49,51%	0,21902	0,12594	0,07142	0,03990	0,02195	0,01193			0,01478			50,49%
9	0,21914	0,12422	0,06937	0,03815	0,02064	0,01096	0,00568	0,00695			49,51%	0,21911	0,12605	0,07153	0,04001	0,02204	0,01195	0,00640		0,00781			50,49%
10	0,21918	0,12426	0,06942	0,03821	0,02071	0,01104	0,00578	0,00295	0,00356		49,51%	0,21916	0,12610	0,07159	0,04008	0,02211	0,01200	0,00641	0,00338	0,00406			50,49%
11	0,21919	0,12428	0,06945	0,03824	0,02074	0,01108	0,00582	0,00301	0,00151	0,00180	49,51%	0,21918	0,12613	0,07162	0,04011	0,02214	0,01204	0,00644	0,00339	0,00176		0,00207	50,49%
12	0,21920	0,12429	0,06946	0,03825	0,02076	0,01110	0,00584	0,00303	0,00154	0,00076	49,51%	0,21919	0,12614	0,07164	0,04013	0,02216	0,01206	0,00646	0,00340	0,00176	0,00090		50,49%
13	0,21920	0,12429	0,06946	0,03826	0,02077	0,01111	0,00585	0,00304	0,00155	0,00078	49,51%	0,21920	0,12615	0,07164	0,04014	0,02217	0,01207	0,00647	0,00341	0,00177	0,00090		50,49%
14	0,21920	0,12429	0,06946	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00304	0,00156	0,00078	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01207	0,00647	0,00342	0,00177	0,00090		50,49%
15	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00304	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01207	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
16	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
17	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
18	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
19	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
20	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
21	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
22	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
23	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
24	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
25	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
26	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
27	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
28	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
29	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
30	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%
31	0,21920	0,12429	0,06947	0,03826	0,02077	0,01111	0,00586	0,00305	0,00156	0,00079	49,51%	0,21920	0,12615	0,07165	0,04014	0,02218	0,01208	0,00648	0,00342	0,00178	0,00091		50,49%

Literaturhinweise

- [1] **Avellaneda, M., Stoikov, S.:** *High-frequency trading in a limit order book*. Quantitative Finance, Vol. 8 (3), 217–224, 2008.
- [2] **Bali, T.G., Engle, R.F., Murray, S.:** *Empirical Asset Pricing: The Cross Section of Stock Returns*, Wiley, 2016.
- [3] **Behrends, E.:** *Introduction to Markov Chains*. Springer, 2000.
- [4] **Cao, L. (Hrsg.):** *Multi-Asset Strategies: The Future of Investment Management*. CFA Institute, 2018.
- [5] **Cartea, A., Jaimungal, S.:** *Modelling Asset Prices for Algorithmic and High-Frequency Trading*. Applied Mathematical Finance, Vol. 20 (6), 512-547, 2013.
- [6] **Degiannakis, S., Floros, Ch.:** *Modelling and Forecasting High Frequency Financial Data*. Palgrave Macmillan, 2015.
- [7] **Dworsky, L.:** *Probably Not*. 2. Auflage, Wiley, 2019.
- [8] **Heilmann, W.-R., Schröter, K.:** *Grundbegriffe der Risikothorie*. 2. Auflage, VVW, 2013.
- [9] **Henze, N.:** *Irrfahrten – Faszination der Random Walks*. 2. Auflage, Springer, 2018.
- [10] **Hosmer, D.W., Lemeshow, St., Sturdivant, R.X.:** *Applied Logistic Regression*, 3. Auflage, Wiley, 2013.
- [11] **Jurczenko, E., Maillet, B. (Hrsg.):** *Multi-moment Asset Allocation and Pricing Models*, Wiley, 2006.
- [12] **Klenke, A.:** *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 3. Auflage, Springer, 2013.
- [13] **Klugman, R., Panjer, H., Willmot, G.:** *Loss Models - From Data to Decisions*, 3. Auflage, Wiley, 2008.
- [14] **Levin, D.A., Peres, Y.:** *Markov Chains and Mixing Times*, 2. Auflage, American Mathematical Society, 2017.
- [15] **Ross, Sh.:** *Simulation*. 5. Auflage, Academic Press, 2012.
- [16] **Schlittgen, R.:** *Multivariate Statistik*. Oldenbourg, 2009.
- [17] **Schmidt, K.:** *Versicherungsmathematik*. 3. Auflage, Springer, 2009.

Weblinks

- [1] **ARIVA - Financial Services**, <https://www.ariva.de/>
- [2] **comdirect**, <https://www.comdirect.de/>
- [3] **onvista – Finanzportal**, <https://www.onvista.de/>